Движение тела в центральном поле

Теоретическая часть данного расчета изложена в основном по
[Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теоретическая физика, т.1, Механика, §14].

Закон движения тела **r**(t) в поле U(**r**) определяется вторым законом Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad (1)$$

и начальными условиями $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \mathbf{v}_0.$

В некоторых случаях дифференциальные уравнения (1) можно решить в аналитической форме. Причем лишь в двух из них все траектории финитных движений замкнуты и имеют форму эллипса:
1) В хорошо известном случае финитного движения тела в гравитационном поле U(r) = -α/r.
2) Движение пространственного осциллятора: U(r) = αr^2.
[Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теоретическая физика, т.1, Механика, §14, §23 - Задача 3].

Рассчитаем как будет влиять на движение тела изменение показателя при r, а также некоторая поправка $\delta U = -\frac{\alpha_1}{r^{n_1}}$

Отметим, что траектория финитного движения в полях -α/r и αr^2 оказывается гораздо более чувствительна к возмущению dU, чем траектории в других полях. Эта особенность связана в конечном счете с тем, что орбита в полях -α/r и αr^2 замкнута при любых значениях момента импульса и энергии (E<0).

Для этого зададим потенциал вида:

$$U(x,y,\alpha,n,\alpha_1,n_1) := -\frac{\alpha}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n} - \frac{\alpha_1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n_1}}$$

$$U\_r(r,\alpha,n,\alpha_1,n_1) := -\frac{\alpha}{r^n} - \frac{\alpha_1}{r^{n_1}}$$

Возьмем производные:

$$\frac{d}{dx}U(x,y,\alpha,n,\alpha_1,n_1) \rightarrow \frac{\alpha}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^n}\cdot\frac{n}{x^2+y^2}\cdot x + \frac{\alpha_1}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n_1}}\cdot\frac{n_1}{x^2+y^2}\cdot x$$

$$\frac{d}{dy}U(x,y,\alpha,n,\alpha_1,n_1) \rightarrow \frac{\alpha}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^n}\cdot\frac{n}{x^2+y^2}\cdot y + \frac{\alpha_1}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n_1}}\cdot\frac{n_1}{x^2+y^2}\cdot y$$

Определим параметры и вспомогательные функции :

$m := 1$ - масса тела

$\alpha := -1$ $n := -2$ - значения α и n в случае пространственного осциллятора (задаче Кеплера соответствуют α=1, n=1)

$\alpha_1 := 0.115$ $n_1 := 2$ - параметры поправочного члена

$t_{begin} := 0$ $t_{end} := 20$ - начальное и конечное время $NP := 5000$ - количество рассчитываемых точек траектории

$dt := \frac{t_{end} - t_{begin}}{NP}$ $dt = 0.004$ - временной шаг

$$dUdx(x,y) := \frac{\alpha}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^n}\cdot\frac{n}{x^2+y^2}\cdot x + \frac{\alpha_1}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n_1}}\cdot\frac{n_1}{x^2+y^2}\cdot x$$

$$dUdy(x,y) := \frac{\alpha}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^n}\cdot\frac{n}{x^2+y^2}\cdot y + \frac{\alpha_1}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n_1}}\cdot\frac{n_1}{x^2+y^2}\cdot y$$

- функции, определяющие производные dU/dx и dU/dy.

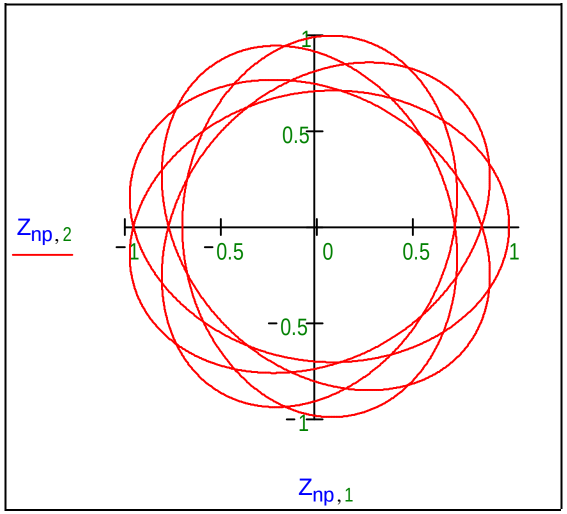
Зададим начальные условия $rv = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ vx_0 \\ vy_0 \end{pmatrix}$: $rv := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1.1 \end{pmatrix}$, а также определим правые части системы уравнений, описывающей движение тела: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ -\frac{1}{m}\frac{dU}{dx} \\ -\frac{1}{m}\frac{dU}{dy} \end{pmatrix}$,

необходимые для расчета траектории с помощью функции rkfixed: $D(t,rv) := \begin{pmatrix} rv_2 \\ rv_3 \\ -\frac{1}{m}\cdot dUdx\left(rv_0, rv_1\right) \\ -\frac{1}{m}\cdot dUdy\left(rv_0, rv_1\right) \end{pmatrix}$

Наконец, проведем расчет:

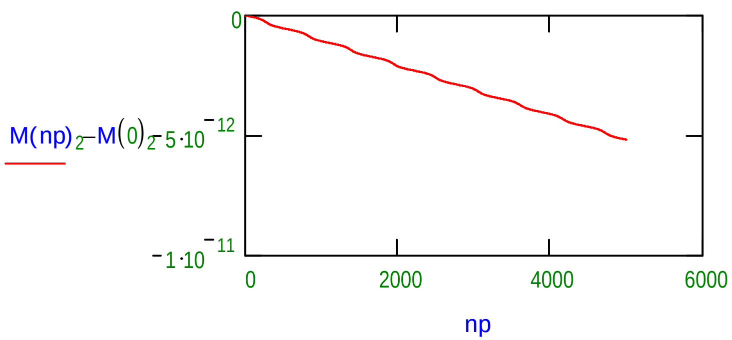
$Z := rkfixed\left(rv, t_{begin}, t_{end}, NP - 1, D\right)$

$np := 0 .. NP - 1$



Разберем некоторые закономерности и особенности движения в центральном поле. Известно, что в центральном поле сохраняется момент вращения тела относительно центра поля **M**(t)=[**r**(t)×**p**(t)]. Проверим, что в наших расчетах это действительно так:

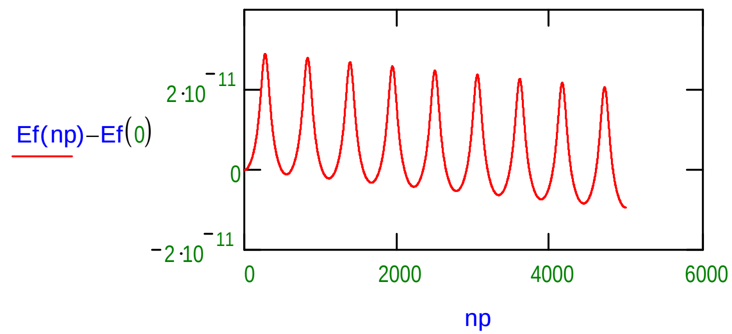
$$r(np) := \begin{pmatrix} Z_{np,1} \\ Z_{np,2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v(np) := \begin{pmatrix} Z_{np,} \\ Z_{np,} \\ 0 \end{pmatrix} \quad p(np) := m \cdot \begin{pmatrix} Z_{np,3} \\ Z_{np,4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad M(np) := r(np) \times p(np)$$



Поскольку векторы **M** и r взаимно перпендикулярны, постоянство **M** означает, что при движении частицы ее радиус-вектор все время остается в одной плоскости - плоскости, перпендикулярной к **M**. Отсюда следует, что траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости. В связи с этим, расчет траектории достаточно проводить в плоскости xy, полагая z=0, что мы и делали выше.

Используя выражения приведенные ниже, можно убедиться, что с хорошей точностью также сохраняется полная энергия частицы:

$Ek(np) := \frac{m\cdot(|v(np)|)^2}{2}$ - кинетическая энергия $\quad Ep(np) := U\left(r(np)_0, r(np)_1, \alpha, n, \alpha_1, n_1\right)$ - потенциальная энергия $\quad Ef(np) := Ek(np) + Ep(np)$ - полная энергия



Введем в плоскости движения частицы полярные координаты: x=ρsinϕ y=rcosϕ z=z. Полная энергия частицы $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{m}}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$

в этих координатах имеет вид (при условии z=0): $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{m}}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right) + \boldsymbol{U}(\rho)$.

Момент импульса $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{m}\dot{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{m}\dot{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{m}\dot{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix}$ оказывается равен $\mathbf{M} = \boldsymbol{m}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \rho\cos\phi & \rho\sin\phi & 0 \\ \dot{\rho}\cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\phi & \rho\dot{\phi}\sin\phi + \dot{\rho}\cos\phi & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho^2\dot{\phi} \end{pmatrix}$, т.е. $\mathbf{M} = \boldsymbol{M_z} = \boldsymbol{m}\rho^2\dot{\phi}$. (2)

Поскольку M=const, а $\boldsymbol{r} \equiv \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2} = \rho$, то $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{m}}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{\boldsymbol{M}^2}{2\boldsymbol{m}\boldsymbol{r}^2} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$ (3)

Данное выражение показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с "эффективной" потенциальной энергией $U_{eff} = U(r) + M^2/2mr^2$. Значения ρ, при которых $U(r) + M^2/2mr^2 = E$, определяют границы области движения по расстоянию от центра. При выполнении этого равенства радиальная скорость r' обращается в нуль. Это не означает остановки частицы (как было бы при истинном одномерном движении), так как угловая скорость ϕ' не обращается в ноль. Равенство r'=0 означает "точку поворота" траектории, в которой функция r(t) переходит от уменьшения к увеличению или наоборот.

Если область допустимого изменения r ограничивается лишь одним условием $r \geq r_{min}$, то движение частицы инфинитно - ее траектория приходит из бесконечности и уходит на бесконечность.
Если область изменения r имеет две границы r_{min} и r_{max}, то движение является финитным и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями $r = r_{min}$ и $r = r_{max}$. Найдем значения r_{min} и r_{max}:

$E := Ef(0)$ $M := |r(0) \times p(0)|$ $U_{eff}(r) := -\frac{\alpha}{r^n} - \frac{\alpha_1}{r^{n_1}} + \frac{M^2}{2 \cdot m \cdot r^2}$

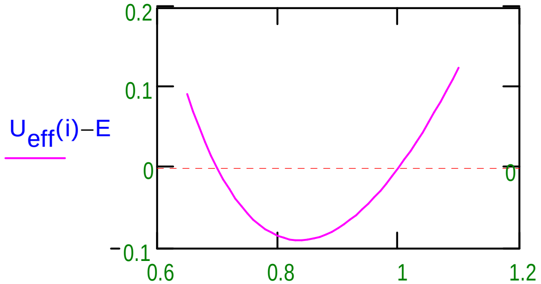
Построим зависимость U_{eff} - E, чтобы правильно задать начальные значения для поиска r_{min} и r_{max}.

$i0 := 0.65$ $\delta := 0.01$ $ik := 1.1$ $i := i0, i0 + \delta .. ik$

Given

$U_{eff}(r) = E$

$F(r) := Find(r)$

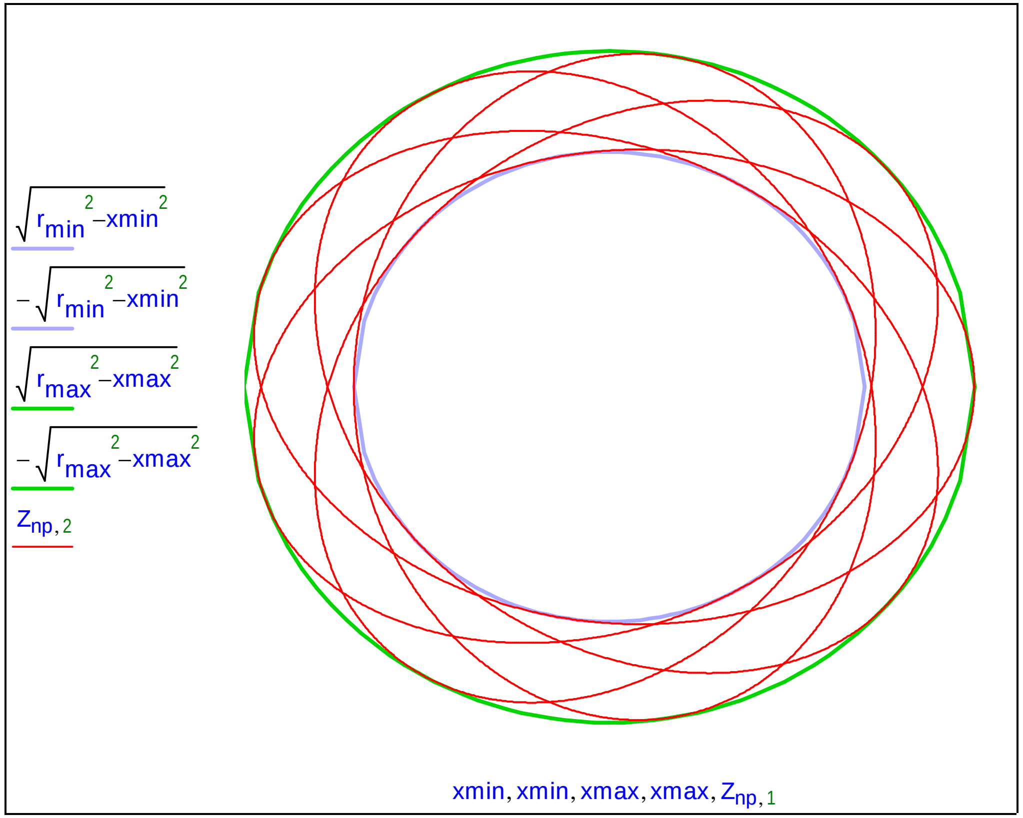


$guess1 := 0.6$ $r_{min} := F(guess1)$ $r_{min} = 0.700000067$

$guess2 := 0.9$ $r_{max} := F(guess2)$ $r_{max} = 0.999999994$ $r_{max} := 1.001$

Проверка правильности найденных решений: $U_{eff}(r_{min}) - E = -9.798958267 \times 10^{-8}$ $U_{eff}(r_{max}) - E = 0.001022468$

$xmin := -r_{min}, -r_{min} + \frac{2 \cdot r_{min}}{50} .. r_{min}$ $xmax := -r_{max}, -r_{max} + \frac{2 \cdot r_{max}}{50} .. r_{max}$



Ограниченная область движения частицы вовсе не означает, что ее траектория непременно является замкнутой кривой. Найдем на какой угол повернется радиус-вектор частицы за время, в течение которого r изменится от r_{max} до r_{min} и затем опять до r_{max}. Так как из (2) => $d\phi = M*dt/(mr^2)$, а из (3) - $dt = \dfrac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}}$, то получаем

$$\Delta\phi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{M/r^2}{\sqrt{2m(E - U(r)) - M/r^2}}\,dr$$

Условие замкнутости траектории заключается в том, чтобы этот угол был равен рациональной части от 2π, т.е. имел вид $\Delta\phi = 2\pi u/v$, (4)
где u и v - целые числа. Тогда через v повторений периода времени за который точка поворачивается на этот угол ее радиус-вектор, сделав u полных оборотов, совпадет со своим первоначальным значением, т.е. траектория замкнется. В рассматриваемом случае

$$\Delta\phi := 2\cdot\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}}{\sqrt{2\cdot m\cdot\left(E - U\_r\left(r,\alpha,n,\alpha_1,n_1\right)\right) - \frac{M^2}{r^2}}}\,dr \qquad \Delta\phi = 3.489225371 - 0.097153958i$$

И равенство (4) с хорошей точностью выполняется при $u := 5$ и $v := 9$: $2\cdot\pi\cdot\frac{u}{v} = 3.490658504$,а

$\Delta\phi - 2\cdot\pi\cdot\frac{u}{v} = -0.001433133 - 0.097153958i$.

Однако такие случаи исключительны, и при произвольном виде U(r) угол $\Delta\phi$ не является рациональной частью от 2π. Поэтому в общем случае траектория финитного движения не замкнута. Она бесчисленное число раз проходит через минимальное и максимальное расстояние и за бесконечное время заполняет все кольцо между двумя граничными окружностями. Существует лишь два типа центральных полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты. Это поля, в которых потенциальная энергия частицы пропорциональна 1/r или r^2. Первый из этих случаев соответствует ньютоновскому полю тяготения и кулоновскому электростатическому полю, а второй так называемому пространственному осциллятору.

Наличие центробежной энергии (при движении с $M \neq 0$), обращающейся при $r \to 0$ в бесконечность, как $1/r^2$ приводит обычно к невозможности проникновения движущихся частиц к центу поля, даже если последнее само по себе имеет характер притяжения. "Падение" частицы в центр возможно лишь, если потенциальная энергия достаточно быстро стремится к $-\infty$ при $r \to 0$. Т.к. кинетическая энергия частицы всегда >0, то из (3) следует $E - U(r) - M^2/2mr^2 > 0$ или $r^2U(r) < Er^2 - M^2/2m$. Отсюда "падение" на центр возможно лишь при условии $r^2U(r)|_{r\to 0} < -M^2/2m$, т.е. U(r) должно стремиться к $-\infty$ либо как $-\alpha/r^2$ с $\alpha > M^2/2m$, либо пропорционально $-1/r^n$ с $n > 2$.