

# Дифракция Фраунгофера на отверстиях в форме равнобедренного треугольника

$$I_0 := 1 \cdot \frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \quad \text{- интенсивность света, падающего на отверстие}$$

$$\lambda := 560 \cdot \text{nm} \quad \text{- длина волны падающего света}$$

$$S_{\text{w}} := (0.005 \cdot \text{mm})^2 \quad S = 0.000025 \text{ mm}^2$$

$$k := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad k = 1.121997376 \times 10^7 \frac{1}{\text{m}} \quad \text{- волновой вектор}$$

$$ac := 2 \cdot \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} \quad ac = 0.007598357 \text{ mm} \quad \text{- стороны равнобедренного треугольника, имеющего площадь S}$$

$$\omega := k \cdot c \quad \omega = 3.363663513 \times 10^{15} \frac{1}{\text{s}} \quad \text{- циклическая частота}$$

$$\nu := 2 \cdot \pi \cdot \omega \quad \nu = 2.113452116 \times 10^7 \text{ GHz} \quad \text{- частота}$$

Расчитаем дифракционные картины для набора треугольных отверстий площади S, с длинами оснований пробегающими значения от  $g \cdot ac$  до  $ac/g$  ( $g := 1.9$ )

$$\text{FRAMEb} := 0 \quad \text{- Начальное значение FRAME, которое необходимо задавать в окошке "Animate" (Меню "View")}$$

$$\text{FRAMEe} := 99 \quad \text{- Конечное значение FRAME}$$

$$a_0 := \frac{ac}{g} \quad \text{- Начальное значение длины основания}$$

$$q := \frac{\text{FRAMEe}}{\sqrt{g^2}} \quad \text{- Знаменатель прогрессии значений a}$$

$$\text{FRAME} := 16$$

$$a := a_0 \cdot q^{\text{FRAME}} \quad a = 0.004921169 \text{ mm} \quad \text{- длина основания треугольника}$$

$$b := \sqrt{\frac{4 \cdot S^2}{a^2} + \frac{a^2}{4}} \quad b = 0.010453894 \text{ mm} \quad \text{- длины боковых сторон треугольника}$$

$$h := \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \quad h = 0.010160188 \text{ mm} \quad \text{- высота треугольника}$$

$$\frac{ac}{a} = 1.5440146 \frac{a}{2} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = 2.5 \times 10^{-11} \text{ m}^2$$

Построение графического изображения отверстия

$$t(x, y) := \text{if} \left[ \left( y > \frac{-h}{2} \right) \wedge \left( y < \frac{2 \cdot h}{a} \cdot x + \frac{h}{2} \right) \wedge \left( y < -\frac{2 \cdot h}{a} \cdot x + \frac{h}{2} \right), 1, 0 \right]$$

$$B := g \cdot ac \quad Nb := 250$$

$$i := 0 \dots Nb - 1 \quad j := 0 \dots Nb - 1$$

$$T_{i,j} := t \left( \frac{-B}{2} + i \cdot \frac{B}{Nb - 1}, -\frac{11B}{20} + j \cdot \frac{\frac{22}{20} \cdot B}{Nb - 1} \right)$$



T

$k \cdot a = 55.215384498$      $k \cdot b = 117.292414454$      $\gg 1$  - условие слабого отклонения от геометрической оптики (малые углы дифракции)

$R_{\text{max}} := 1 \cdot \text{cm}$  - расстояние от отверстия до экрана на котором наблюдается дифракционная картина

$L_{\text{max}} := 1 \cdot \text{cm}$  - расстояние от отверстия до центра плоского экрана на котором наблюдается дифракционная картина

$$\frac{k \cdot a^2}{L} = 0.027172423 \quad \frac{k \cdot b^2}{L} = 0.122616245 \quad \ll 1 \text{ - условие дифракции Фраунгофера}$$

Аналитический расчет компонент фурье дифрагированного света  $u_q$ :

$$\int_0^{\eta} \left[ \int_{\frac{\alpha}{2 \cdot \eta} \cdot (y - \eta)}^{\frac{\alpha}{2 \cdot \eta} \cdot (\eta - y)} e^{i \cdot k \cdot (n_x \cdot x + n_y \cdot y)} dx \right] dy \text{ simplify } \rightarrow (-2) \cdot \eta \cdot \frac{(-2) \cdot e^{i \cdot n_y \cdot \eta \cdot k} \cdot n_x \cdot \alpha + e^{\frac{1}{2} \cdot i \cdot k \cdot n_x \cdot \alpha} \cdot n_x \cdot \alpha + 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot i \cdot k \cdot n_x \cdot \alpha} \cdot n_y \cdot \eta + e^{\frac{-1}{2} \cdot i \cdot k \cdot n_x \cdot \alpha} \cdot n_x \cdot \alpha - 2 \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot i \cdot k \cdot n_x \cdot \alpha} \cdot n_y \cdot \eta}{(n_x \cdot \alpha - 2 \cdot n_y \cdot \eta) \cdot k^2 \cdot n_x \cdot (n_x \cdot \alpha + 2 \cdot n_y \cdot \eta)}$$

$$u_q(n_x, n_y) := -2 \cdot h \cdot \frac{-2 \cdot \exp(i \cdot n_y \cdot h \cdot k) \cdot n_x \cdot a + \exp\left(\frac{1}{2} \cdot i \cdot k \cdot n_x \cdot a\right) \cdot n_x \cdot a + 2 \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot i \cdot k \cdot n_x \cdot a\right) \cdot n_y \cdot h + \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot i \cdot k \cdot n_x \cdot a\right) \cdot n_x \cdot a - 2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot i \cdot k \cdot n_x \cdot a\right) \cdot n_y \cdot h}{(n_x \cdot a - 2 \cdot n_y \cdot h) \cdot k^2 \cdot n_x \cdot (n_x \cdot a + 2 \cdot n_y \cdot h) + 0}$$

Интенсивность дифрагированного света в элемент телесного угла  $d\Omega$  нормированная на  $d\Omega$ :

$$I_{\text{dldo\_t}}(\theta, \phi) := I_0 \cdot \frac{k^2}{S \cdot (2\pi)^2} \cdot \left( |u_q(\sin(\theta) \cdot \cos(\phi), \sin(\theta) \cdot \sin(\phi))|^2 \right)$$

$$I_t(\theta, \phi, R) := \frac{S}{R^2} \cdot dI_{do\_t}(\theta, \phi) \quad \text{- зависимость интенсивности дифрагированного света от угла дифракции и расстояния от отверстия}$$

Интенсивность дифрагированного света при  $\theta = 0$  на расстоянии  $L = 10 \text{ mm}$  от отверстия

$$I_t(10^{-5}, 10^{-5}, L) = 0.00001993 \frac{\text{watt}}{\text{m}^2}$$

Проверка равенства 1 отношения суммарных мощностей падающего на щель и дифрагированного света

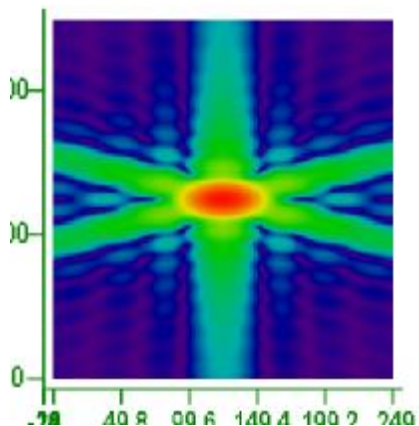
$$1 - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} dI_{do\_t}(\theta, \phi) d\phi \sin(\theta) d\theta}{I_0} = 0.056986357 \%$$

$$I_{txy}(x, y) := \frac{S}{R^2} \cdot I_0 \cdot \frac{k^2}{S \cdot 4 \cdot \pi^2} \cdot \left( \left| u_q \left( \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{L^2 + x^2 + y^2}} \right) \right| \right)^2 \quad \text{- интенсивность дифрагированного света в точке с координатами (x,y), находящейся на экране, расположенном на расстоянии L от отверстия. (Начало координат находится в точке пересечения оси отверстия с экраном.)}$$

$A_w := 1 \cdot \text{cm}$  - размер плоского экрана, на котором наблюдают дифракционную картинку

$N_{wx} := 250$  - число точек по оси x и y по значениям интенсивности света в которых строится графическое изображение дифракционной картинку.

$$i := 0..N-1 \quad j := 0..N-1 \quad G_{i,j} := \ln \left( \frac{I_{txy} \left( \frac{-A}{2} + i \cdot \frac{A}{N-1}, \frac{-A}{2} + j \cdot \frac{A}{N-1} \right)}{I_0} + 10^{-9} \right) \quad \text{- масштабирование значений интенсивности для лучшего графического представления.}$$



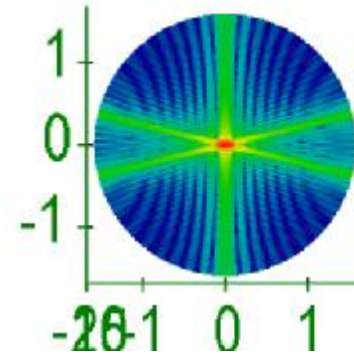
$$G(\theta, \phi) := \left( \begin{array}{c} \theta \cdot \cos(\phi) \\ \theta \cdot \sin(\phi) \\ \ln\left(\frac{I_t(\theta, \phi, R)}{I_0} + 10^{-12}\right) \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{xmesh} := 150 \\ \text{ymesh} := 350 \end{array} \quad \text{Sph} := \text{CreateMesh}\left(G, -0.001, 1.01 \cdot \frac{\pi}{2}, -0.001, 2.001\pi, \text{xmesh}, \text{ymesh}\right)$$

Интенсивность дифрагированного света в полярных координатах  $(\theta, \phi)$ :

$$I_{tnxny}(nx, ny) := \frac{S}{R^2} \cdot I_0 \cdot \frac{k^2}{S \cdot 4 \cdot \pi^2} \cdot \left( |u_q(nx, ny)| \right)^2$$

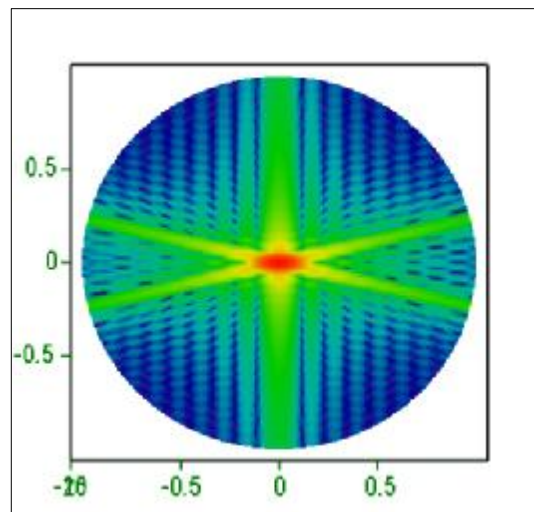
- интенсивность дифрагированного света в направлении нормали

$(nx, ny, \sqrt{1 - (nx^2 + ny^2)})$  на расстоянии R от отверстия.



$$\tilde{G}(u, v) := \left( \begin{array}{c} \sin(u) \cdot \cos(v) \\ \sin(u) \cdot \sin(v) \\ \ln\left(\frac{I_{tnxny}(\sin(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \sin(v))}{I_0} + 10^{-12}\right) \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{xmesh} := 100 \\ \text{ymesh} := 300 \end{array} \quad \text{Sph} \\ \tilde{\text{Sph}} := \text{CreateMesh}\left(\tilde{G}, -0.001, 1.001 \cdot \frac{\pi}{2}, -0.001, 2.001\pi, \text{xmesh}, \text{ymesh}\right)$$

Интенсивность дифрагированного света в координатах  $(nx, ny)$ :



Sph