Дифракция Фраунгофера на отверстии прямоугольной формы

$I_0 := 1 \cdot \frac{watt}{m^2}$ - интенсивность света, падающего на отверстие

$\lambda := 560 \cdot nm$ - длина волны падающего света

$k := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$ $k = 1.121997376 \times 10^7 \frac{1}{m}$ - волновой вектор

$S := (0.005 \cdot mm)^2$ $S = 0.000025 \, mm^2$ - площадь отверстия

$\omega := k \cdot c$ $\omega = 3.363663513 \times 10^{15} \frac{1}{s}$ - циклическая частота

$\gamma := 2$ - коэффициент, определяющий во сколько раз сторона b больше стороны а

$\nu := 2 \cdot \pi \cdot \omega$ $\nu = 2.113452116 \times 10^7 \, GHz$ - частота

$a := \sqrt{\frac{S}{\gamma}}$ $a = 0.003535534 \, mm$

$b := \gamma \cdot a$ $b = 0.007071068 \, mm$

- длины сторон прямоугольника (а - по оси x, b - по оси y)

$k \cdot a = 39.668597662$ $k \cdot b = 79.337195324$ >> 1 - условие слабого отклонения от геометрической оптики (малые углы дифракции)

$R := 10 \cdot cm$ - расстояние от отверстия до экрана на котором наблюдается дифракционная картина

$L := 10 \cdot cm$ - расстояние от отверстия до центра плоского экрана на котором наблюдается дифракционная картина

$\frac{k \cdot a^2}{L} = 0.001402497$ $\frac{k \cdot b^2}{L} = 0.005609987$ << 1 - условие дифракции Фраунгофера

Аналитический расчет компанент фурье дифрагированного света:

$$\int_{\frac{-\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \left[\int_{\frac{-\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} e^{i \cdot \kappa \cdot (q_x \cdot x + q_y \cdot y)} \, dx \right] dy \text{ simplify } \rightarrow 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \alpha \cdot q_x\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \beta \cdot q_y\right)}{\kappa^2 \cdot q_y \cdot q_x}$$

Интенсивность дифрагированного света в элемент телесного угла dо нормированная на dо:

$$\mathrm{dIdo\_r1}(\theta,\phi) := I_0 \cdot \frac{k^2}{4\cdot\pi^2}\cdot(a\cdot b)\cdot\left[\begin{array}{l} 1 \quad \text{if} \quad \theta = 0 \vee \theta = \pi \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} 4\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot k\cdot\theta\right)^2}{k^2\cdot\theta^2\cdot a^2} \quad \text{if} \quad \phi = 0 \vee \phi = \pi \vee \phi = 2\cdot\pi \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} 4\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot b\cdot k\cdot\theta\right)^2}{k^2\cdot\theta^2\cdot b^2} \quad \text{if} \quad \phi = \frac{\pi}{2} \vee \phi = \frac{3\pi}{2} \\ \dfrac{1}{(a\cdot b)^2}\cdot 16\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{a}{2}\cdot k\cdot\theta\cdot\cos(\phi)\right)^2}{(k\cdot\theta\cdot\cos(\phi))^2}\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{b}{2}\cdot k\cdot\theta\cdot\sin(\phi)\right)^2}{(k\cdot\theta\cdot\sin(\phi))^2} \quad \text{otherwise} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right]$$

$$\mathrm{dIdo\_r2}(\theta,\phi) := I_0 \cdot \frac{k^2}{4\cdot\pi^2}\cdot(a\cdot b)\cdot\left[\begin{array}{l} 1 \quad \text{if} \quad \theta = 0 \vee \theta = \pi \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} 4\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot k\cdot\sin(\theta)\right)^2}{k^2\cdot\sin(\theta)^2\cdot a^2} \quad \text{if} \quad \phi = 0 \vee \phi = \pi \vee \phi = 2\cdot\pi \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} 4\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot b\cdot k\cdot\sin(\theta)\right)^2}{k^2\cdot\sin(\theta)^2\cdot b^2} \quad \text{if} \quad \phi = \frac{\pi}{2} \vee \phi = \frac{3\pi}{2} \\ 16\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{a}{2}\cdot k\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\right)^2}{(a\cdot k\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\phi))^2}\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{b}{2}\cdot k\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)\right)^2}{(b\cdot k\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\phi))^2} \quad \text{otherwise} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right]$$

При малых углах дифракции первая формула переходит во вторую. Какая из этих формул дает более правильный результат в случае больших углов пока не ясно (интуиция говорит, что вторая, но это еще надо доказать).

$dIdo\_r(\theta,\phi) := dIdo\_r2(\theta,\phi)$

$I\_r(\theta,\phi,R) := \frac{a \cdot b}{R^2} \cdot dIdo\_r(\theta,\phi)$ - зависимость интенсивности дифрагированного света от угла дифракции и расстояния от отверстия

Интенсивность дифрагированного света при θ = 0 на расстоянии $L = 100\,mm$ от отверстия: $'\_r(0,0,L) = 1.992984694 \times 10^{-7}\,\frac{watt}{m^2}$

Проверка равенства 1 отношения суммарных мощностей падающего на щель и дирагированного света

$$1 - \frac{\int_0^{\pi} 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dIdo\_r1(\theta,\phi)\,d\phi\,\sin(\theta)\,d\theta}{I_0} = 1.838754715\,\%$$

$$1 - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cdot\pi} dIdo\_r2(\theta,\phi)\,d\phi\,\sin(\theta)\,d\theta}{I_0} = 0.056716466\,\%$$

$$I\_r\_xy(x,y) := I\_r\left(\operatorname{asin}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{L^2+x^2+y^2}}\right), \text{if}\left(x = 0, \frac{\pi}{2}, \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)\right), \sqrt{L^2+x^2+y^2}\right)$$

- интенсивность дифрагированного света в точке с координатами (x,y), находящейся на экране, расположенном на расстоянии L от отверстия. (Начало координат находится в точке пересечения оси отверстия с экраном.)

$N := 250$ - число точек по оси x и y по значениям интенсивности света в которых строится графическое изображение дифракционной картинки.

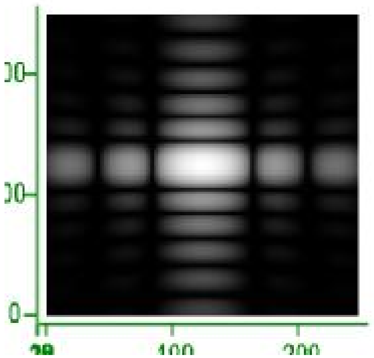
$i := 0 .. N-1$

$j := 0 .. N-1$

$A := 10 \cdot cm$ - размер плоского экрана, на котором наблюдают дифракционную картинку

$$G_{i,j} := \ln\left(\frac{I\_r\_xy\left(\frac{-A}{2} + i \cdot \frac{A}{N-1}, \frac{-A}{2} + j \cdot \frac{A}{N-1}\right)}{I_0} + 10^{-10}\right)$$

- масштабирование значений интенсивности для лучшего графического представления.



G

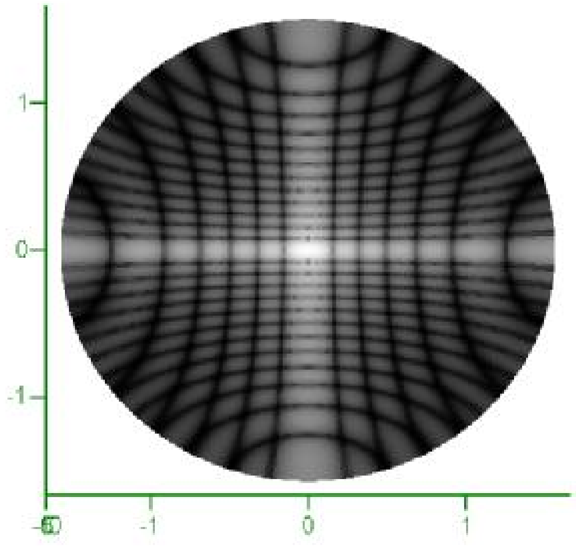
$$G(\theta,\phi) := \begin{pmatrix} \theta\cdot\cos(\phi) \\ \theta\cdot\sin(\phi) \\ \ln\left(\dfrac{dIdo\_r(\theta,\phi)}{I_0} + 10^{-5}\right) \end{pmatrix}$$

$xmesh := 100$

$ymesh := 400$

$Sph := CreateMesh\left(G, 0, \dfrac{\pi}{2}, 0, 2\pi, xmesh, ymesh\right)$

Относительная интенсивность дифрагированного света в сферческих координатах (θ,ϕ)
θ от 0 до π,
ϕ от 0 до 2π:



Sph

n_x, n_y

$$dIdo\_r\_nxny(nx, ny) := dIdo\_r\left(\operatorname{asin}\left(\sqrt{nx^2 + ny^2}\right), \operatorname{if}\left(nx = 0, \frac{\pi}{2}, \operatorname{atan}\left(\frac{ny}{nx}\right)\right)\right)$$

- интенсивность дифрагированного света в направлении нормали (nx,ny, $\sqrt{1 - \left(nx^2 + ny^2\right)}$) в элемент телесного угла do нормированная на do

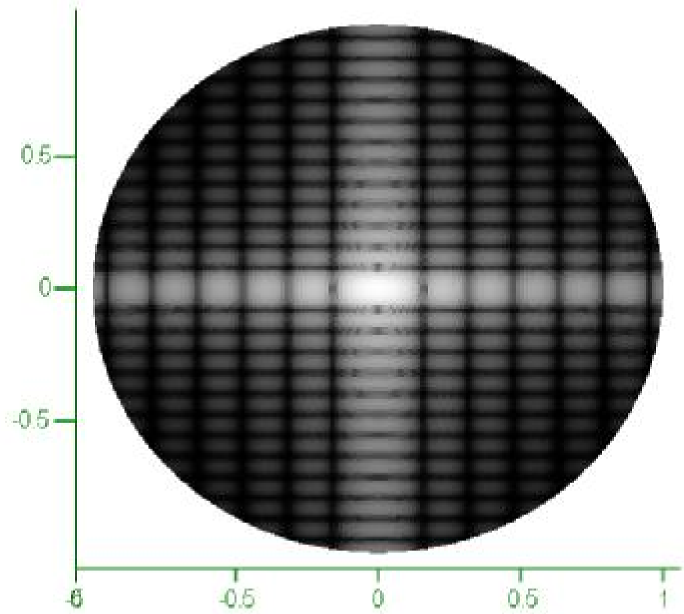
$$G_n(u, v) := \begin{pmatrix} \sin(u)\cdot\cos(v) \\ \sin(u)\cdot\sin(v) \\ \ln\left(\frac{dIdo\_r\_nxny(\sin(u)\cdot\cos(v), \sin(u)\cdot\sin(v))}{I_0} + 10^{-4}\right) \end{pmatrix}$$

$xmesh := 100$

$ymesh := 360$

$$Sph_n := \operatorname{CreateMesh}\left(G_n, 0, \frac{\pi}{2}, 0\cdot\pi, 2.01\cdot\pi, xmesh, ymesh\right)$$

Интенсивность дифрагированного света в координатах (nx,ny):



Sph_n