

Дифракция Фраунгофера на щели

$$I_0 := 1 \cdot \frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \quad - \text{интенсивность света, падающего на отверстие}$$

$$\lambda := 560 \cdot \text{nm} \quad - \text{длина волны падающего света}$$

$$k := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad k = 1.121997376 \times 10^7 \frac{1}{\text{m}} \quad - \text{волновой вектор}$$

$$\omega := k \cdot c \quad \omega = 3.363663513 \times 10^{15} \frac{1}{\text{s}} \quad - \text{циклическая частота}$$

$$\nu := 2 \cdot \pi \cdot \omega \quad \nu = 2.113452116 \times 10^7 \text{GHz} \quad - \text{частота}$$

$$a := 0.003 \text{mm} \quad - \text{ширина щели} \quad \frac{a}{\lambda} = 5.357142857$$

$$k \cdot a = 33.659921288 \quad \gg 1 \quad - \text{условие слабого отклонения от геометрической оптики (малые углы дифракции)}$$

$$R := 20 \cdot \text{cm} \quad - \text{расстояние от отверстия до полусферического экрана на котором наблюдается дифракционная картина}$$

$$L := 2 \cdot \text{cm} \quad - \text{расстояние от отверстия до центра плоского экрана на котором наблюдается дифракционная картина}$$

$$\frac{k \cdot a^2}{L} = 0.005048988 \quad \ll 1 \quad - \text{условие дифракции Фраунгофера}$$

$$dI_{do_s}(\theta) := \text{if} \left(\theta = 0, \frac{I_0 \cdot a \cdot k}{2 \cdot \pi}, I_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{a}{2} \cdot k \cdot \theta\right)^2}{\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot k \cdot \theta^2} \right) \quad - \text{интенсивность дифрагированного света в элемент угла } d\theta \text{ нормированная на } d\theta$$

$$dI_{do_s}(0) = 5.357142857 \frac{1}{\text{m}^2} \text{ watt}$$

$$I_s(\theta, R) := \frac{a}{R} \cdot dI_{do_s}(\theta) \quad - \text{зависимость интенсивности дифрагированного света от угла дифракции и расстояния от щели}$$

например, интенсивность дифрагированного света при $\theta = 0$ на расстоянии $L = 20 \text{mm}$ от отверстия: $I_s(0.000, L) = 0.000803571 \frac{\text{watt}}{\text{m}^2}$

Оценим точность приближения, проверив равенство интенсивностей падающего на щель и дифрагированного света:

$$\left| 1 - \frac{2 \cdot \int_0^{\pi} dI_{do_s}(\theta) d\theta}{I_0} \right| = 0.596989879 \% \quad \text{Свет дифрагирует также и в обратном направлении}$$

$$\left| 1 - \frac{2 \cdot \int_0^{\infty} dI_{do_s}(\theta) d\theta}{I_0} \right| = 0.007885413 \% \quad \text{Если бы MathCad считал точно, то в этом интеграле получилось бы точно 0 так как:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{ka \cdot x}{2}\right)^2}{\pi \cdot \frac{ka}{2} \cdot x^2} dx \text{ simplify} \rightarrow \text{signum}(ka)$$

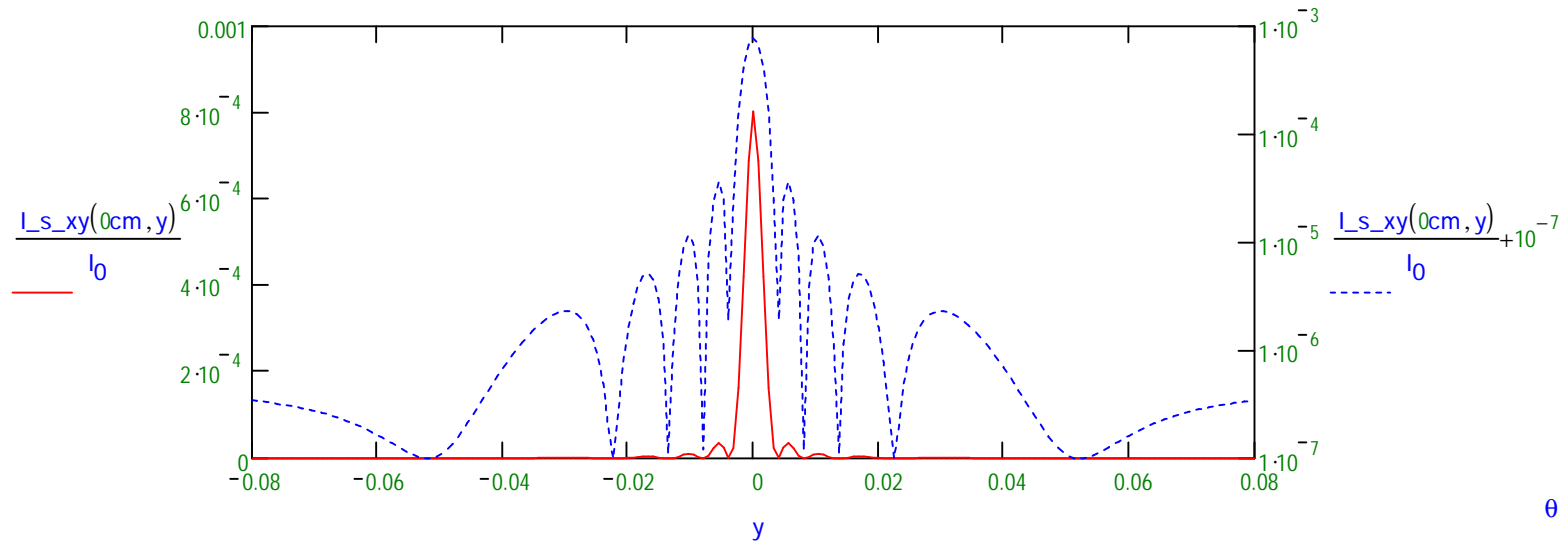
$$I_{s_xy}(x, y) := I_s \left(\frac{y}{\sqrt{L^2 + y^2}}, \sqrt{L^2 + y^2} \right)$$

- интенсивность дифрагированного света в точке с координатами (x,y), находящейся на экране, расположенном на расстоянии L от отверстия. (Начало координат находится в точке пересечения экрана с прямой, проведенной из центра щели перпендикулярно плоскостям щели и экрана.)

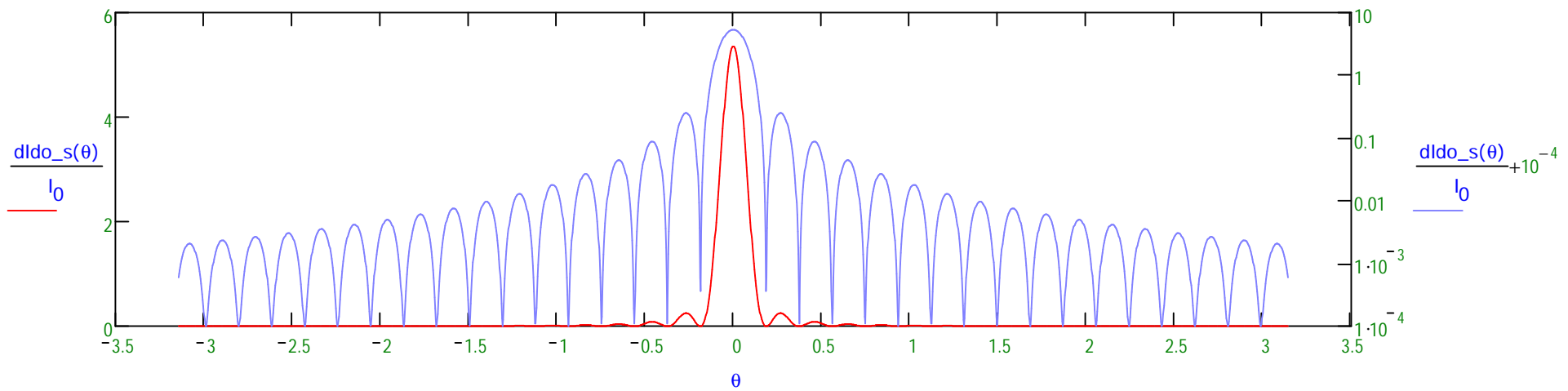
$$I_{s_xy}(1\text{cm}, 1\text{cm}) = 0.00011375 \frac{1}{\text{m}^2} \text{ W}$$

$H := 8\text{cm}$ размер плоского экрана на котором наблюдается дифракционная картина

$$y := -H, -H + \frac{H}{100} \dots H$$



$$\theta := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{1000} \dots \pi$$



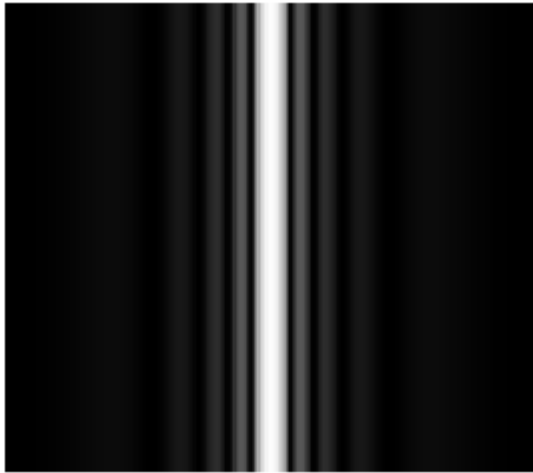
$A := 5 \cdot \text{cm}$ - половина размера плоского экрана

$N := 350$ - число точек по оси x и y по значениям интенсивности света в которых строится графическое изображение дифракционной картинке.

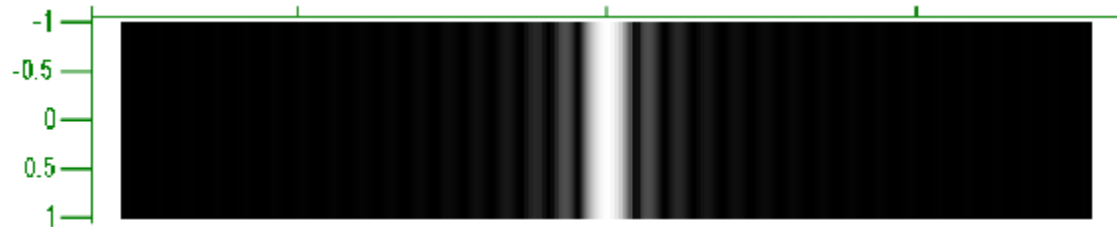
$$G_{xy,i,j} := \ln \left(\frac{I_{s_xy} \left(-A + i \cdot \frac{2 \cdot A}{N-1}, -A + j \cdot \frac{2 \cdot A}{N-1} \right)}{I_0} + 10^{-5} \right) \quad i := 0..N-1 \quad j := 0..N-1$$

- Масштабирование значений интенсивности для лучшего графического представления.

$$G\theta\phi(x, \theta) := \left(\begin{array}{c} x \\ \theta \\ \ln \left(\frac{dI_{do_s}(\theta)}{I_0} + 10^{-1} \right) \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_{\text{mesh}} := 2 \quad y_{\text{mesh}} := 500 \\ \text{Sph} := \text{CreateMesh}(G\theta\phi, -1, 1, -\pi, \pi, x_{\text{mesh}}, y_{\text{mesh}}) \end{array}$$



Относительная интенсивность дифрагированного света в цилиндрических координатах (ϕ, y) :



Sph

Gxy

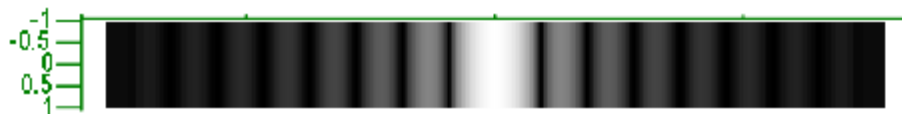
n_x, n_y

$I_{s_nxny}(ny) := dI_{do_s}(ny)$ - интенсивность дифрагированного света в направлении нормали $(ny, \sqrt{1 - ny^2})$ в элемент угла $d\theta$ нормированная на $d\theta$.
(Цель имеет бесконечный размер по оси x.)

$$\text{Sph} := \text{CreateMesh}(G, -1, 1, -1, 1, x_{\text{mesh}}, y_{\text{mesh}})$$

Интенсивность дифрагированного света в координатах (nx, ny) :

$$G(x, ny) := \left(\begin{array}{c} x \\ \text{asin}(ny) \\ \ln \left(\frac{I_{s_nxny}(\text{asin}(ny))}{I_0} + 10^{-2} \right) \end{array} \right)$$



Sph