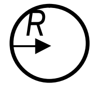
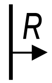
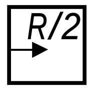
Вывод основных формул используемых в расчетах магнитных полей и потоков кругового витка и соленоида

Система единиц – «СИ»

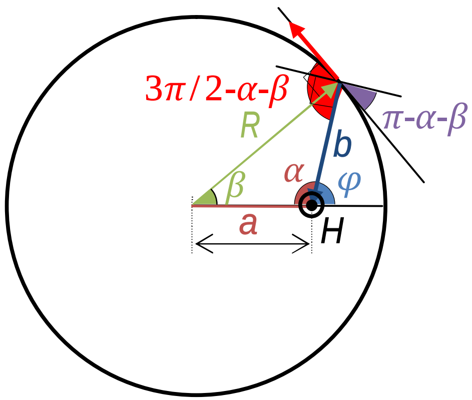
Хорошо известные формулы

В центре круглого витка с током радиуса *R*		$H = \dfrac{I}{2R}$
На расстоянии *R* от бесконечного провода		$H = \dfrac{I}{2\pi R}$
В центре квадратной рамки со стороной *R*		$H = \dfrac{2\sqrt{2}I}{\pi R}$

Закон Био-Савара-Лапласа

$$dH = \frac{I}{4\pi}\frac{\left[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}\right]}{r^3}$$

Формула для магнитного поля круглого витка с током в плоскости витка



$$dl=\frac{bd\phi}{\cos(\pi-\alpha-\beta)}=-\frac{bd\phi}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}]=dl\,b\sin(3\pi/2-\alpha-\beta)=-dl\,b\cos(\alpha+\beta)$$

$$R^2=a^2+r^2-2ar\cos\alpha \qquad \cos\alpha=\cos(\pi-\phi)=-\cos\phi$$

$$r^2-(2a\cos\phi)r-R^2+a^2=0$$

$$r=\frac{-2a\cos\phi\pm\sqrt{(2a\cos\phi)^2+4R^2-4a^2}}{2}=-a\cos\phi\pm\sqrt{R^2-a^2\sin^2\phi}$$

Оставляем +, т.к. r >0: $r=R\left(\sqrt{1-\left(\frac{a}{R}\right)^2\sin^2\phi}-\frac{a}{R}\cos\phi\right)$

Итак

$$dH=\frac{I}{4\pi r^3}\left(-dl\,r\cos(\alpha+\beta)\right)=\frac{I}{4\pi r^3}\frac{rd\phi}{\cos(\alpha+\beta)}r\cos(\alpha+\beta)=\frac{I}{4\pi}\frac{d\phi}{r}$$

$$H=\frac{I}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\left(\sqrt{1-(a/R)^2\sin^2\phi}-(a/R)\cos\phi\right)}$$

Сделаем замену $a/R\equiv k$ и преобразуем интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\ldots=\int_0^{2\pi}\frac{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}+k\cos\phi\right)}{\left(1-k^2\sin^2\phi-k^2\cos^2\phi\right)}d\phi=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi=\frac{4}{1-k^2}E(\pi/2,k).$$

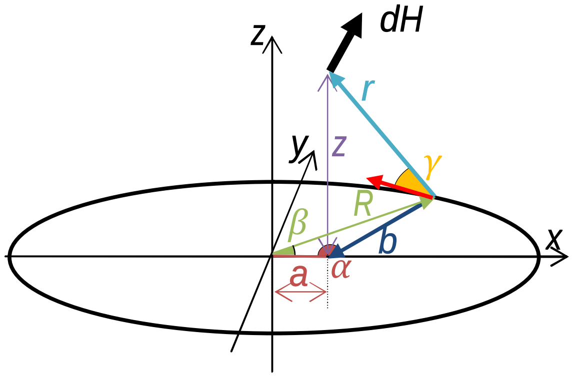
Окончательно в виде для Mathad: $H=\dfrac{I}{\pi R\left(1-(a/R)^2\right)}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1-(a/R)^2\sin^2\phi}\,d\phi$

Найдем магнитный поток через виток с током:

$$\Phi_\circ=\int_0^R \mu\mu_0\frac{I}{\pi R}\frac{E(\pi/2,k)}{1-k^2}2\pi a\,da=2\mu\mu_0 IR\int_0^1\frac{kE(\pi/2,k)}{1-k^2}dk$$

Поскольку $\displaystyle\int_0^1\frac{kE(\pi/2,k)}{1-k^2}dk<\int_0^1\frac{k}{1-k^2}dk=\infty$, то $\Phi_\circ=\infty$

Формула для магнитного поля витка с током



Вывод из геометрических соображений

$$dH = \frac{I}{4\pi r^3}\left(-dl\, r\cos(\gamma)\right) = \frac{I}{4\pi r^3}\frac{b\,d\phi}{\cos(\alpha+\beta)} r\cos(\gamma)$$

$$dH_z = dH\frac{b}{r} = \frac{I}{4\pi r^3}\frac{b^2 d\phi}{\cos(\alpha+\beta)}\cos(\gamma)$$

γ = α + β поскольку, как показано ниже, $\left[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}\right]_z$ - не зависит от *r* и *h* и, следовательно, равно $\left[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}\right]_z$ при h = 0.

Окончательно $H_z = \dfrac{I}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{b^2}{\left(b^2+h^2\right)^{3/2}}d\phi$

Вывод с использованием аналитической геометрии

$$d\mathbf{l} = \begin{pmatrix} -dl\sin\beta & dl\cos\beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -b\cos\phi & -b\sin\phi & z \end{pmatrix}$$

$$\left[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -dl\sin\beta & dl\cos\beta & 0 \\ -b\cos\phi & -b\sin\phi & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z\,dl\cos\beta \\ z\,dl\sin\beta \\ b\,dl\left(\cos\phi\cos\beta + \sin\phi\sin\beta\right) \end{pmatrix}$$

т.к. ϕ = π - α, то $\left[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}\right]_z = b\,dl\left(\cos\phi\cos\beta + \sin\phi\sin\beta\right) = bR\,d\beta\left(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta\right)$ - не зависит от *r* и *h*

Выразим α через β.

Теорема синусов и косинусов: —— = —— = ———— ( ) = ———— ( )

= + − 2

$$\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = \frac{R}{b}\sin\beta\sin\beta - \frac{a^2+b^2-R^2}{2ab}\cos\beta = \frac{R}{b}\sin^2\beta - \frac{a^2+\left(R^2+a^2-2aR\cos\beta\right)-R^2}{2ab}\cos\beta =$$

$$\frac{R}{b}\sin^2\beta - \frac{a\cos\beta - R\cos^2\beta}{b} = \frac{R}{b} - \frac{a\cos\beta}{b}$$

Следовательно $\left[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}\right]=Rd\beta\begin{pmatrix} z\cos\beta \\ z\sin\beta \\ R-a\cos\beta \end{pmatrix}$

Итак $d\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi}\frac{Rd\beta}{r^3}\begin{pmatrix} z\cos\beta \\ z\sin\beta \\ R-a\cos\beta \end{pmatrix}$ и тогда $\mathbf{H}=\frac{IR}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\begin{pmatrix} z\cos\beta \\ z\sin\beta \\ R-a\cos\beta \end{pmatrix}\frac{d\beta}{r^3}$, где $r=\sqrt{z^2+R^2+a^2-2Ra\cos\beta}$

Формула для магнитного поля кольца (соленоида с бесконечно тонкой толщиной стенки) с током

(Если ось кольца совпадает с осью *z* и кольцо ограничено плоскостями $z = h_1$ и h_2, то для нахождения поля в точке (x,y,z) в приведенных выше формулах надо сделать замну $z \rightarrow (z - h)$ и проинтегрировать по h)

$$H_x(a,z)=\frac{j}{4\pi}\int\limits_{h_1}^{h_2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(z-h)\cos\beta}{\left((h-z)^2+R^2+a^2-2Ra\cos\beta\right)^{3/2}}d\phi dh$$

$$H_y(a,z)=\frac{j}{4\pi}\int\limits_{h_1}^{h_2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(z-h)\sin\beta}{\left((h-z)^2+R^2+a^2-2Ra\cos\beta\right)^{3/2}}d\phi dh$$

$$H_z(a,z)=\frac{j}{4\pi}\int\limits_{h_1}^{h_2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R-a\cos\beta}{\left((h-z)^2+R^2+a^2-2Ra\cos\beta\right)^{3/2}}d\phi dh$$