GoldZub.narod.ru

Магнитное поле соленоида произвольной длины

Магнитное поле соленоида длины L и радиуса R

$j := 1 \cdot \frac{A}{m}$ - Линейная плотность тока, протекающего по соленоиду (I/L)

Ось соленоида совпадает с осью z. Соленоид ограничен плоскостями z = -L/2 и L/2.

x и z составляющие напряженности магнитного поля соленоида:

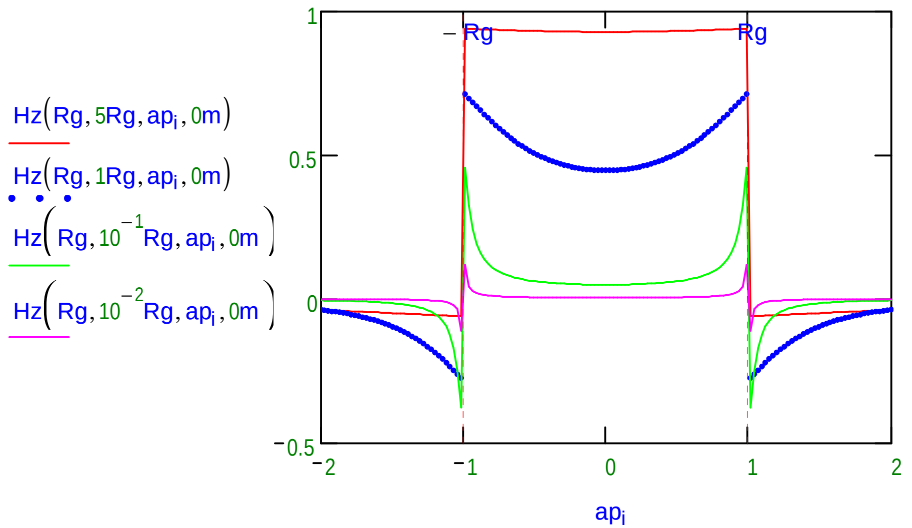
$$Hx(R, L, a, z) := \frac{j \cdot R}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\cdot\pi} \frac{(z-h)\cdot\cos(\beta)}{\left[R^2 + a^2 - 2\cdot R\cdot a\cdot\cos(\beta) + (z-h)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\, d\beta\, dh$$

$$Hz(R, L, a, z) := \frac{j \cdot R}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\cdot\pi} \frac{R - a\cdot\cos(\beta)}{\left[R^2 + a^2 - 2\cdot R\cdot a\cdot\cos(\beta) + (z-h)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\, d\beta\, dh$$

$Rg := 1m$

$Hz(2m, 1m, 1m, 0m) = 0.292081538 \frac{A}{m}$

$ab := -2 \cdot Rg$ $\quad ae := -ab$ - диапазон значений a $\quad Na := 151$ - размер сетки значений a $\quad i := 0 .. Na - 1$ $\quad ap_i := ab + i \cdot \frac{ae - ab}{Na - 1}$



Расчет z-составляющей магнитного поля в плоскости перпендикулярной оси соленоида и делящей его пополам (x компонента = 0)

$$Hz\left(Rg, 5Rg, Rg - \frac{Rg}{10}, 0m\right) = 0.938155934 \frac{A}{m}$$

Отметим, что в отличие от бесконечно тонкого витка с током, для соленоида с бесконечно тонкими стенками при $L \to 0$, $a \to R^-$ и условии ($L >> R - a$) напряженность $H(R,L,a,0) \to j/2 \neq 0$, и поэтому поток через внутреннюю часть соленоида $\neq \infty$. Ниже мы займемся его вычислением.

Показать аналитически, что при $L \to 0$, $a \to R^-$ и условии ($L >> R - a$), напряженность $H(R,L,a,0) \to j/2$, беря интегралы, приведенные выше, мне не удалось даже при помощи Mathematica. Однако это очевидно и так, поскольку вблизи поверхности даже очень низкого соленоида поле будет таким же как около бесконечной плоскости.

x и z составляющие напряженности магнитного поля (H_x, H_z), а также |H| в плоскости, проходящей через ось соленоида:

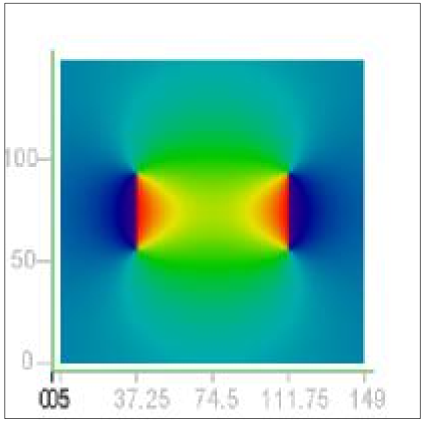
$xb := -2 \cdot Rg$ $\quad xe := 2 \cdot Rg$ $\quad$ - диапазон значений a $\quad Na := 150$ - размер сетки значений a $\quad i := 0 .. Na - 1$ $\quad xp_i := xb + i \cdot \dfrac{xe - xb}{Na - 1}$

$zb := -2 \cdot Rg$ $\quad ze := 2 \cdot Rg$ $\quad$ - диапазон значений z $\quad Nz := 150$ - размер сетки значений z $\quad k := 0 .. Nz - 1$ $\quad zp_k := zb + k \cdot \dfrac{ze - zb}{Nz - 1}$

$tb := time(Na)$ $\quad Hzdata_{i,k} := Hz\left(Rg, Rg, xp_i, zp_k\right)$ $\quad time(Na) - tb = 181.123000145$

$Hxdata_{i,k} := Hx\left(Rg, Rg, xp_i, zp_k\right)$

$Hdata_{i,k} := \sqrt{\left(Hzdata_{i,k}\right)^2 + \left(Hxdata_{i,k}\right)^2}$



Hzdata

$max(Hzdata) = 0.707874 \dfrac{A}{m}$

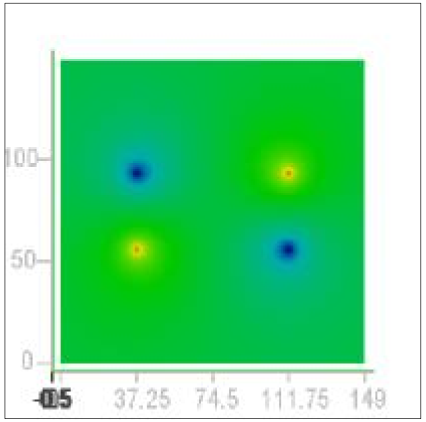
$min(Hzdata) = -0.302393731 \dfrac{A}{m}$

xp = (m)

	0
0	-2
1	-1.973154362
2	-1.946308725
3	-1.919463087
4	-1.89261745
5	-1.865771812
6	-1.838926174
7	-1.812080537
8	-1.785234899
9	-1.758389262
10	-1.731543624
11	-1.704697987
12	-1.677852349
13	-1.651006711
14	-1.624161074
15	-1.597315436

zp = (m)

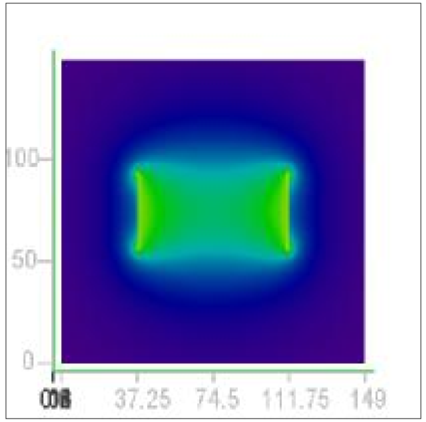
	0
0	-2
1	-1.973154362
2	-1.946308725
3	-1.919463087
4	-1.89261745
5	-1.865771812
6	-1.838926174
7	-1.812080537
8	-1.785234899
9	-1.758389262
10	-1.731543624
11	-1.704697987
12	-1.677852349
13	-1.651006711
14	-1.624161074
15	-1.597315436



Hxdata

$max(Hxdata) = 0.726213999 \dfrac{A}{m}$

$min(Hxdata) = -0.726213999 \dfrac{A}{m}$



Hdata

$max(Hdata) = 0.749335983 \dfrac{A}{m}$

$min(Hdata) = 0.017427102 \dfrac{A}{m}$

Поток магнитного поля соленоида

Поток магнитного поля через внутреннюю часть плоскости, перпендикулярной оси соленоида и делящей его пополам:

$$\Phi(R, L) := \mu_0 \cdot 2\cdot\pi \int_{0\cdot m}^{R} \frac{j\cdot R}{4\cdot\pi} \cdot \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\cdot\pi} \frac{R - a\cdot\cos(\beta)}{\left(R^2 + a^2 - 2\cdot R\cdot a\cdot\cos(\beta) + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} \, d\beta \, dh \cdot a \, da$$

Например при $R := 1m$ и $L := 1m$: $\Phi(R, L) = 0.000002282\,Wb$

Как и должно быть, поток через внешнюю часть плоскости равен потоку через внутреннюю, взятому с противоположным знаком:

$$\mu_0 \cdot 2\cdot\pi \int_{R}^{\infty\cdot m} Hz(R, L, r, 0m)\cdot r \, dr = -0.000002282\,Wb$$

Заметим, что если известно значение Φ_1 для соленоида с размерами L_1 и R_1, то при j=const для соленоида с размерами в A раз большими ($l_2 = A*L_1$ и $R_2 = A*R_1$) магнитный поток Φ_2 будет в A^2 раз больше:

$$\frac{\Phi(4\cdot cm, 8\cdot cm)}{\Phi(0.004\cdot cm, 0.008\cdot cm)} = 1\times 10^{6}$$

Таким образом, для полного решения задачи о нахождении $\Phi(R_x,L_x)$ для соленоида произвольных размеров, достаточно рассчитать $\Phi(R,L_i)$ для набора соленоидов различной длинны L_i с некоторым определенным значением R. После этого $\Phi(R_x,L_x)$ можно будет найти из соотношения $\Phi(R_x,L_x) = (R_x/R)^2*\Phi(R,L_x*R/R_x)$

$Rx := 10\cdot cm \quad Lx := 3\cdot cm$

$\Phi(Rx, Lx) = 1.124243627\times 10^{-8}\,Wb$

$$\left(\frac{Rx}{R}\right)^2 \cdot \Phi\left(R, Lx\cdot\frac{R}{Rx}\right) = 1.124243627\times 10^{-8}\,Wb$$

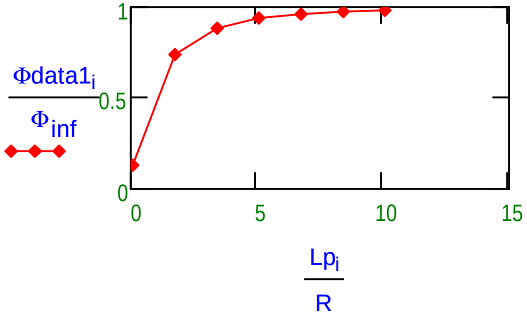
Случай L >> R

Величина Φ при увеличении L/R должна стремиться к зачению Φ_∞ через бесконечно длинный соленоид: $\Phi_\infty = \mu_0 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot j$, т.е. при неизменном токе I поток

Φ должен падать обратно пропорционально L. (Φ_∞*L = $\Phi_{inf} := \mu_0 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot j$ $\Phi_{inf} = 0.000003948\,Wb$ = const)

$Lb := \frac{R}{10}$ $Le := 10 \cdot R$ - диапазон значений L $NL := 7$ - размер сетки значений a $i := 0 .. NL - 1$ $Lp_i := Lb + i \cdot \frac{Le}{NL - 1}$

$\Phi data1_i := \Phi(R, Lp_i)$



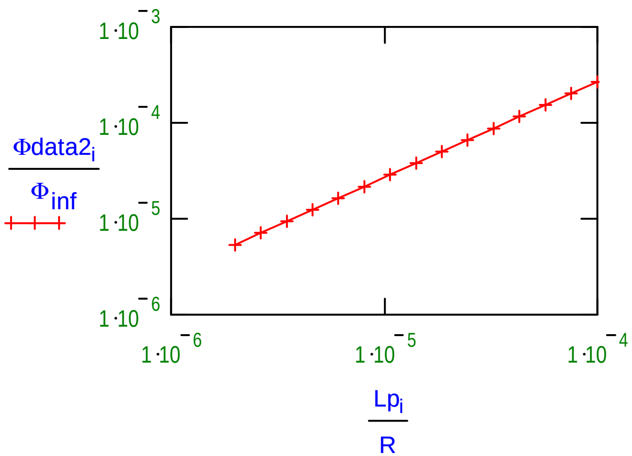
Случай L << R

В этом случае при уменьшении L величина Φ будет стремиться к 0 как функция $\Phi(R,L) = A^*\Phi_{inf}{}^*L/R$, где $A \cong e$ (с точностью несколько %).

Действительно:

$R := 1m$ $Lb := 0.0001 \cdot R$ $Le := \frac{Lb}{50} \cdot \frac{10^7}{10^7}$ - диапазон значений L $NL := 15$ - размер сетки значений L $i := 0 .. NL - 1$ $q := \sqrt[NL-1]{\frac{Le}{Lb}}$ $Lp_i := Lb \cdot q^i$

$\Phi data2_i := \Phi(R, Lp_i)$



$R := 1m$

$n := 10^3$ $\Phi_{inf} := \mu_0 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot j$ $\Phi_{inf} = 0.000003948\,Wb$ $e = 2.718281828$

$$\frac{\Phi\left(R, \frac{R}{n}\right)}{\Phi\left(R, \frac{R}{10n}\right)} = 10.232766524 \qquad \frac{\Phi\left(R, \frac{R}{n}\right) \cdot n}{\Phi_{inf}} = 2.763099745 \qquad \Phi\left(R, \frac{R}{n}\right) = 1.090828056 \times 10^{-8}\,Wb$$

$$\frac{\left|\Phi\left(R, \frac{R}{n}\right) - e \cdot \Phi_{inf} \cdot \frac{1}{n}\right|}{e \cdot \Phi_{inf} \cdot \frac{1}{n}} = 1.648759016\,\% \qquad e \cdot \Phi_{inf} \cdot \frac{1}{n} = 1.073134652 \times 10^{-8}\,Wb$$

Получить аналитическое выражение для A мне не удалось. Если кто желает попробовать это сделать, я могу выслать файл с моими расчетами в Mathematica.