GoldZub.narod.ru

Аналитическое решение задачи о многократном столкновении двух тел для μ ~< 19

Найдем скорости тел после первого соударения.

$m := m$ - вспомогательное выражение, переопределяющее m - метр. Необходимо было в старых версиях MathCad для проведения символьных вычислений с переменной m.

$$m \cdot v_0 = M \cdot u_1 + m \cdot v_1$$

$$m \cdot v_0^2 = M \cdot u_1^2 + m \cdot v_1^2$$

Законы сохранения после первого соударения. (Полагается, что u_0=0.)

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$v_0 = \frac{M}{m} \cdot u_1 + v_1$$

$$v_0^2 = \frac{M}{m} \cdot u_1^2 + v_1^2$$

$$\mathrm{Find}(v_1, u_1) \rightarrow \begin{bmatrix} v_0 & [-[(-m) + M]] \cdot \dfrac{v_0}{m + M} \\ 0 & 2 \cdot m \cdot \dfrac{v_0}{m + M} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Первое решение $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует времени до столкновения. Законы сохренения, естественно, тогда тоже выполняются.

Найдем чему должна быть равна масса первого тела, чтобы после первого столкновения тело m остановилось.

Given

$$(-m + M) \cdot \frac{v0}{m + M} = 0$$

$$\mathrm{Find}(M) \rightarrow m$$

Т.е. $\mu v0_1 = 1$.

Найдем чему должна быть равна масса первого тела, чтобы после первого столкновения оба тела продолжили двигаться с одинаковой скоростью.

Given

$$(-m + M) \cdot \frac{v0}{m + M} = 2 \cdot m \cdot \frac{v0}{m + M}$$

$$\mathrm{Find}(M) \rightarrow 3 \cdot m$$

=> $\mu uv_1 = 3$. Т.е. при $\mu < \mu uv_1$ столкновение будет только одно.

Для μ < 3, найдем скорости тел после второго соударения.

Given

$$-m\cdot v1 + M\cdot u1 = M\cdot u2 + m\cdot v2$$

$$m\cdot v1^2 + M\cdot u1^2 = M\cdot u2^2 + m\cdot v2^2$$

Второе соударение произойдет только тогда, когда, как упоминалось выше, $|u_1|<|v_1|$. Это возможно только в том случае, если после первого соударения второе тело движется к стенке. После абсолютно упругого столкновении со стенкой второе тело меняет свою скорость на противоположную и начинает догонять первое тело. Следовательно если мы подставляем v_1 из (1), то перед v_1 необходио поставить знак "-".

$$\mathrm{Find}(v2, u2) \rightarrow \begin{bmatrix} -v1 & \dfrac{(-m)\cdot v1 + v1\cdot M + 2\cdot M\cdot u1}{m+M} \\ u1 & \dfrac{-(2\cdot m\cdot v1 + u1\cdot m - M\cdot u1)}{m+M} \end{bmatrix}$$

$$\frac{-(m\cdot v1 - v1\cdot M - 2\cdot M\cdot u1)}{m+M} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, v1 = v0\cdot\dfrac{m-M}{m+M}, u1 = 2\cdot m\cdot\dfrac{v0}{m+M} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow (-v0)\cdot\frac{m^2 - 6\cdot M\cdot m + M^2}{(m+M)^2}$$

$$\frac{-(2\cdot m\cdot v1 + u1\cdot m - M\cdot u1)}{m+M} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, v1 = v0\cdot\dfrac{m-M}{m+M}, u1 = 2\cdot m\cdot\dfrac{v0}{m+M} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 4\cdot m\cdot v0\cdot\frac{(-m)+M}{(m+M)^2}$$

Найдем $\mu v0_2$.

Given $$v0\cdot\frac{m^2 - 6\cdot M\cdot m + M^2}{(m+M)^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{Find}(M)}{m} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 + 2\cdot 2^{\frac{1}{2}} & 3 - 2\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \text{float}, 15 \rightarrow (5.82842712474620 \quad .17157287525380)$$

Отсюда $\mu v0_2 = 3 + 2\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 5.828$

(Значение $3 - 2\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 0.172$ отбрасываем, поскольку при таком значении μ второго столкновения вообще не будет.)

Определим μuv_2:

Given

$$v0\cdot\frac{m^2-6\cdot M\cdot m+M^2}{(m+M)^2} = 4\cdot m\cdot v0\cdot\frac{-m+M}{(m+M)^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\mathrm{Find}(M)}{m} \to \left(5+2\cdot5^{\frac{1}{2}} \quad 5-2\cdot5^{\frac{1}{2}}\right) \text{ float}, 15 \to (9.47213595499958 \quad .52786404500042)$$

$$\mu uv_2 = 5+2\cdot5^{\frac{1}{2}} = 9.472$$

(Значение $5-2\cdot5^{\frac{1}{2}} = 0.528$ отбрасываем, поскольку при таком значении μ второго столкновения вообще не будет.)

Если упростить уравнение (2), то получится следующее квадратное уравнение:

$\mu := 10$ Given $\mu^2-10\cdot\mu+5=0$ $\mu := \mathrm{Find}(\mu)$ $\mu = 9.472$

Найдем скорости тел после третьего соударения:

$$\frac{-(m\cdot v1-v1\cdot M-2\cdot M\cdot u1)}{m+M} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, v1 = -v0\cdot\frac{m^2-6\cdot m\cdot M+M^2}{(m+M)^2}, u1 = -4\cdot m\cdot v0\cdot\frac{m-M}{(m+M)^2} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \to (-v0)\cdot\frac{\left(-m^3\right)+15\cdot M\cdot m^2-15\cdot m\cdot M^2+M^3}{(m+M)^3}$$

$$\frac{-(2\cdot m\cdot v1+u1\cdot m-M\cdot u1)}{m+M} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, v1 = -v0\cdot\frac{m^2-6\cdot m\cdot M+M^2}{(m+M)^2}, u1 = -4\cdot m\cdot v0\cdot\frac{m-M}{(m+M)^2} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \to 2\cdot m\cdot v0\cdot\frac{3\cdot m^2-10\cdot M\cdot m+3\cdot M^2}{(m+M)^3}$$

Найдем $\mu v0_3$.

Given $$v0\cdot\frac{m^3-15\cdot M\cdot m^2+15\cdot m\cdot M^2-M^3}{(m+M)^3} = 0$$

$$\frac{\mathrm{Find}(M)}{m} \to \left(1 \quad 7+4\cdot3^{\frac{1}{2}} \quad 7-4\cdot3^{\frac{1}{2}}\right) \text{ float}, 15 \to (1. \quad 13.9282032302755 \quad .7179676972448e\text{-}1)$$

□Отсюда $\mu v0_3 = 7+4\cdot3^{\frac{1}{2}} = 13.928$

Определи μuv_3:

Given

$$v0\cdot\frac{-m^3+15\cdot M\cdot m^2-15\cdot m\cdot M^2+M^3}{(m+M)^3} = 2\cdot m\cdot v0\cdot\frac{3\cdot m^2-10\cdot M\cdot m+3\cdot M^2}{(m+M)^3} \qquad (3)$$

$$\frac{\mathrm{Find}(M)}{m}\ \mathrm{float}, 15 \ \rightarrow (19.1956693580892 \quad .231914113479635+.35\mathrm{e}{-13}\cdot i \quad 1.57241652843119-.35\mathrm{e}{-13}\cdot i)$$

$$\mu uv_3 = \frac{2}{3}\cdot\left(756+84\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{56}{\left(756+84\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} + 7 = 19.196$$

(Значения $(0.231914113479617 \quad 1.57241652843116)$ отбрасываем, поскольку при таком значении M/m третьего столкновения вообще не будет.)

Если упростить уравнение (3), то получится следующее квадратное уравнение:

$\mu := 20$ Given $\mu^3 - 21\cdot\mu^2 + 35\cdot\mu - 7 = 0$ $\mu uv_3 := \mathrm{Find}(\mu)$ $\mu uv_3 = 19.196$

Итак, видно, что для нахождения μuv_5 мы получим уравнение 5-ой степени, которое в аналитическом виде не решается.