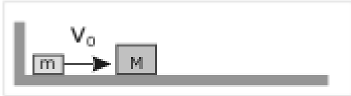
GoldZub.narod.ru

# Задача о многократных столкновениях двух тел.

v.2 (01.07.2007)
переработанная после
v.1 (15.04.2003)

## Условие

Тело массы M покоится на горизонтальной плоскости на некотором расстоянии от стенки. Тело массы m, находящееся между стенкой и первым телом, движется со скоростью v. Определить 1) число столкновений между телами n, 2) конечные скорости тел, 3) $\mu$=M/m при которых тело m останавливается и 4) критические значения $\mu$ при которых происходит увеличение числа соударений. Все удары являются абсолютно упругими. Трения нет.




"mM0.bmp"

На первый взгляд кажется, что задача школьная.
Некоторые ее решения в частных случаях получить очень легко.
Однако оказывается, что общее решение в аналитическом виде этой задачи получить невозможно.
Численное же решение оказывается довольно интересным и поучительным.

## Решение

### Численное решение

Тела будут сталкиваться до тех пор, пока после очередного столкновения модуль скорости тела массы m не станет меньшим, либо равным модулю скорости тела массы M: (|v|<=|u|). (Это очевидно, поскольку если |v|>|u|, то тело m всегда догонит тело M, даже если ему придется вернутся к стенке для того, чтобы поменять знак скорости.)

Найдем скорости тел ($u_2$, $v_2$) после очередного соударения. (До соударения скорости тел равны ($u_1$, $v_1$))

Given

$$-m\cdot v1 + M\cdot u1 = M\cdot u2 + m\cdot v2 \qquad \text{- ЗСИ}$$

$$m\cdot v1^2 + M\cdot u1^2 = M\cdot u2^2 + m\cdot v2^2 \qquad \text{- ЗСЭ}$$

$$\text{Find}(v2, u2) \rightarrow \begin{bmatrix} -v1 & \dfrac{(-m)\cdot v1 + v1\cdot M + 2\cdot M\cdot u1}{m + M} \\ u1 & \dfrac{(-2)\cdot m\cdot v1 - u1\cdot m + M\cdot u1}{m + M} \end{bmatrix}$$

Определим функцию $Coll(M, m, u_0, v_0, N)$, рассчитывающую скорости тел после N столкновений (если реальных столкновений n меньше N, то после последнего столкновения).

$$Coll(M, m, u0, v0, N) := \left| \begin{array}{l} u_0 \leftarrow u0 \\ v_0 \leftarrow v0 \\ i \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{if } |v_{i-1}| > u_{i-1} \\ \quad \left| \begin{array}{l} v_{i-1} \leftarrow |v_{i-1}| \\ v_i \leftarrow \dfrac{m \cdot v_{i-1} - M \cdot v_{i-1} + 2 \cdot M \cdot u_{i-1}}{m + M} \\ u_i \leftarrow \dfrac{-m \cdot u_{i-1} + M \cdot u_{i-1} + 2 \cdot m \cdot v_{i-1}}{m + M} \end{array} \right. \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow i - 1 \\ \text{break} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ i \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

если скорость тела m оказалась отрицательной (тело m движется к стенке), то после отражения от стенки v поменяет знак.

Функция выдает вектор значений, первым элементом которого является скорость первого тела $u_n$, вторым - скорость второго тела $v_n$, третьим - число столкновений n.

Теперь для того, чтобы определить конечные скорости и число столкновений для тел $M := 20$ и $m := 1$ с начальными скоростями $v_0 := 1$ и $u_0 := 0$ , соответственно, надо вызвать функцию Coll, с параметром N заведомо большим реального числа столкновений:

$$Result := Coll(M, m, 0, 1, 40) \qquad Result = \begin{pmatrix} 0.219620426 \\ 0.187982374 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## Значения $u_i(\mu)$, $v_i(\mu)$

С помощью функции Coll легко рассчитать, как будут меняться скорости тел с каждым последующим столкновением.

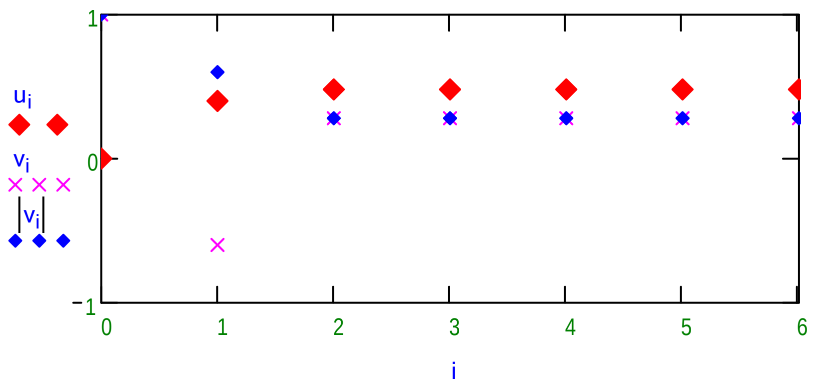
$\mu := 4$ $\quad M := 1$ $\quad m := \frac{M}{\mu}$ $\quad m = 0.25$

$N := 6$ - число, заведомо большее максимального количества столкновений

$Result_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - начальные значения скоростей и числа столкновений

$i := 0..N$ $\quad j := 1..N$

$Result_j := Coll\left[M, m, \left(Result_0\right)_0, \left(Result_0\right)_1, j\right]$ $\quad u_i := \left(Result_i\right)_0$ $\quad v_i := \left(Result_i\right)_1$




$\left(Result_1\right) = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left(Result_4\right) = \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.28 \\ 2 \end{pmatrix}$

## Зависимости $u(\mu)$, $v(\mu)$ и $n(\mu)$

Построим зависимости от $\mu$
1) числа столкновений между телами: $n(\mu)$;
2) скоростей тел сразу после последнего столкновения: $u_n(\mu)$, $v_n(\mu)$;
3) конечной скорости тела m: $|v_n(\mu)|$

$v_0 := 1$ $\quad u_0 := 0$ - начальные скорости

$m := 1$ - масса второго тела

$Mmax := 50$ - максимальная масса первого тела

$pt := 2000$ - число точек на графике

$j := 0..pt$ - вспомогательный параметр

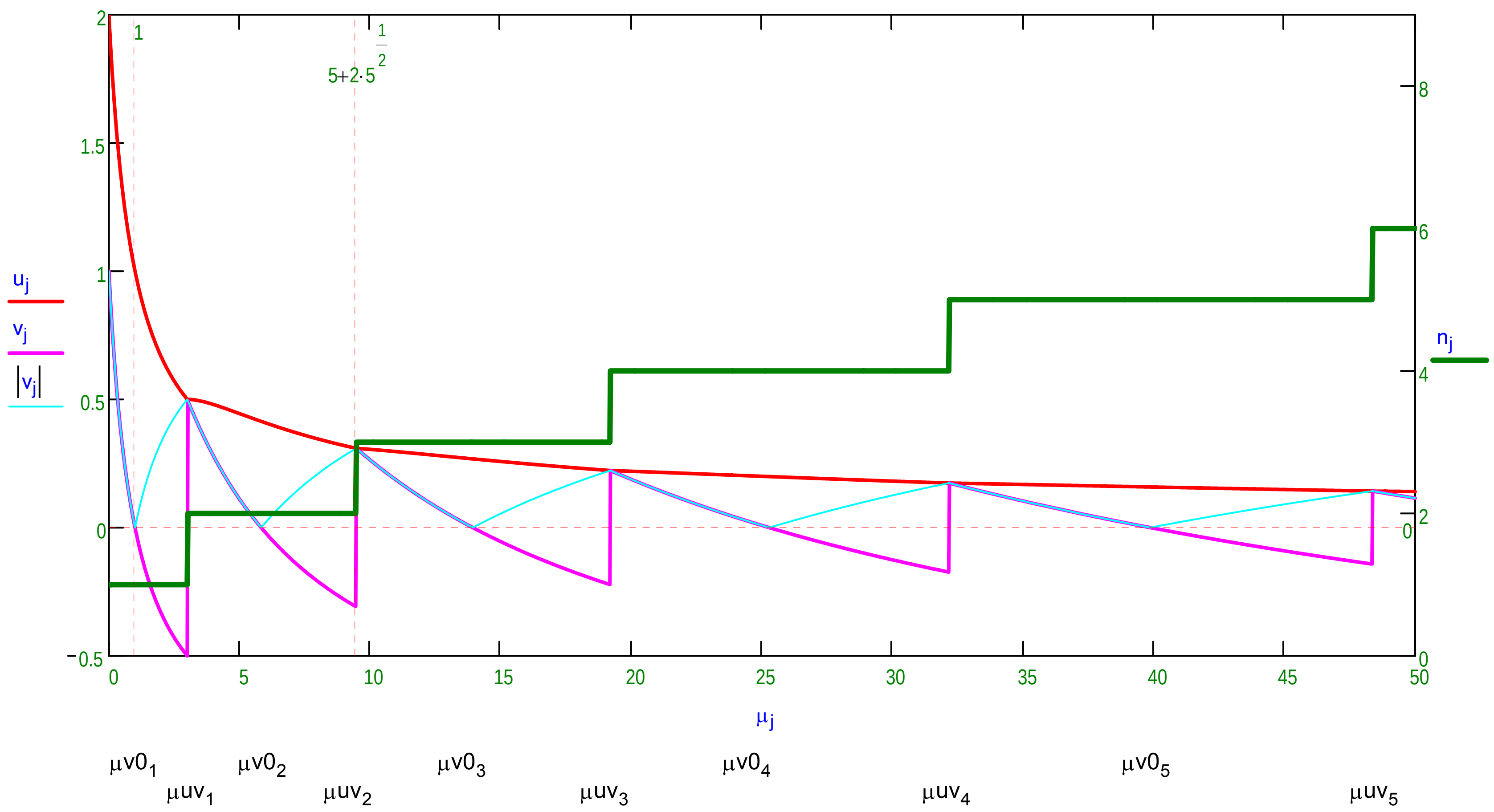
$$\mu_j := \frac{Mmax}{m} \cdot \frac{j}{pt}$$

$\mu =$

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0.025 |
| 2 | 0.05 |
| 3 | 0.075 |
| 4 | 0.1 |

$N := 10$ - число, заведомо большее максимального количества столкновений

$u_j := Coll(\mu_j, m, u_0, v_0, N)_0$ $\quad v_j := Coll(\mu_j, m, u_0, v_0, N)_1$ $\quad n_j := Coll(\mu_j, m, u_0, v_0, N)_2$




**Описание события последнего соударения при изменении $\mu$ = M/m.**

Из приведенного выше графика видно, что при некотором M/m= $\mu = \mu vu_n$ сразу после n-го столкновения $-v_n = u_n$ ($v_n = u_n$ после отражения тела m от стенки). Тело m при этом уже никогда не догонит тело M и, следовательно, тела испытают n столкновений.

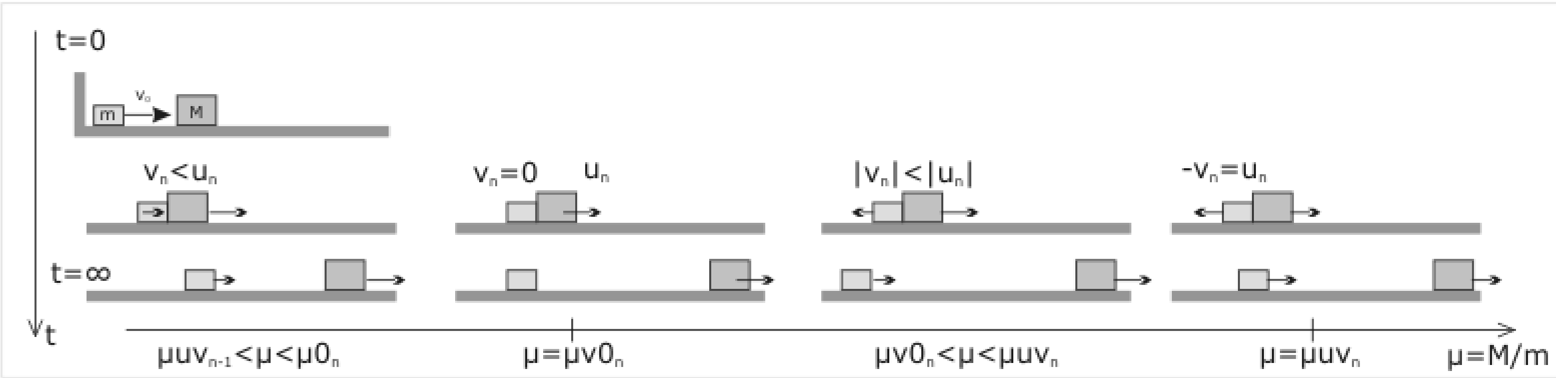
При $\mu > \mu vu_n$ при каждом столкновении тело m будет передавать телу M меньшую долю своего импульса, $|v_n|$ будет больше $u_n$ и, следовательно, тела испытают больше, чем n столкновений.

При $\mu vu_{n-1} <= \mu \square < \mu vu_n$ столкновений будет n, т.к. при каждом столкновении тело m будет передавать телу M большую долю своего импульса, чем при $\mu = \mu vu_n$ и $-v_n$ будет меньше $u_n$. Столкновений будет n.

При некотором $\mu = \mu v0_n$ окажется, что скорость $v_n = 0$.

При дальнейшем уменьшении $\mu$ после n-го соударения скорость тела m уже не будет менять знак и начнет увеличиваться до тех пор пока $\mu$ не станет равным $\mu vu_{n-1}$. (Заметим, что при $\mu \to \mu vu_{n-1}^{+}$ lim(v)=u)

Из рассуждений аналогичных приведенным выше ясно, что при $\mu<\mu vu_n$ n-го столкновения не будет.




"mM.bmp"

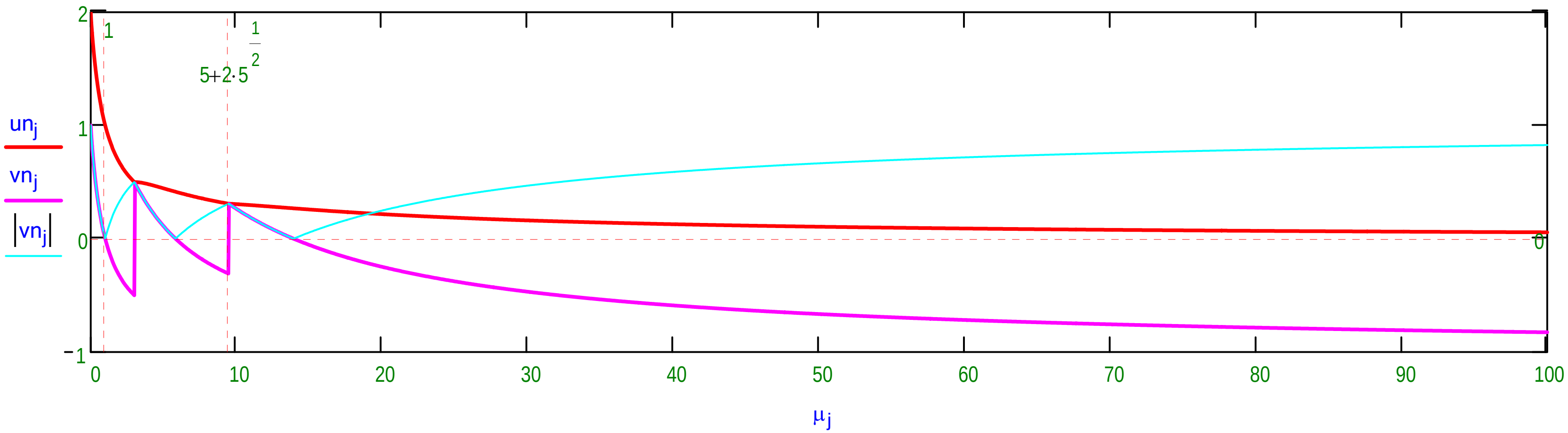
### Некоторые частные случаи

Случаи $\mu$=0 и $\mu$=1 соответствуют известным из школьного курса задачам.
В первом случае при m>>M ($\mu$->0) тело массы m при столкновении практически не меняет своей скорости, а тело массы M отскакивает от него со скоростью вдвое большей скорости $v_0$.
Во втором случае при m=M в результате столкновения тела обмениваются скоростями: тело массы m останавливается, а тело массы M начинает двигаться со скоростью $v_0$.

### Скорости тел после n-го соударения (после последнего, если реальное количество соударений меньше)

$n := 3$ $\quad$ $Mmax := 100$ - максимальная масса первого тела $\quad$ $\mu_j := \frac{Mmax}{m} \cdot \frac{j}{pt}$

$un_j := Coll(\mu_j, m, u_0, v_0, n)_0$ $\quad$ $vn_j := Coll(\mu_j, m, u_0, v_0, n)_1$



## Значения $\mu_n$

Чтобы рассчитать значения $\mu v0_n$ и $\mu uv_n$ необходимо относительно $\mu$ и n (или M и n при m=const) решить системы уравнений

$Coll(M,m.u_0,v_0,n)_2=n$

$u_n=|v_n|$

и

$Coll(M,m.u_0,v_0,n)_2=n$

$v_n=0$

соответственно.

Поскольку первое уравнение дискретное, а второе при произвольном $\mu$ имеет множество решений, то в связке Given-Find нам придется ограничиться только первым уравнением, а предполагаемое значение (guess value) $\mu$ (или M при m=const) нужно будет самим указывать по возможности наиболее близким к правильному ответу.

$m := 1 \quad u_0 := 0 \quad v_0 := 1$ - начальные условия

Given

$$Coll(M, m, u_0, v_0, N)_1 = 0$$

$fv0(N, M) := Find(M)$ используем метод решения Levenberg-Marquardt (контекстное меню: Nonlinear -> ...)

Given

$$Coll(M, m, u_0, v_0, N)_0 = \left|Coll(M, m, u_0, v_0, N)_1\right|$$

$fuv(N, M) := Find(M)$

Поскольку для конкретного значения n сразу задать правильную предполагаемую величину M сложно, то мы пойдем другим путем.

Сначала зададим $M := 10^6$ и определим для этого M значение n: $n := Coll\left(M, 1, u_0, v_0, 10^3\right)_2 \qquad n = 785$

а теперь для этого n найдем

$\mu uv_n := fuv(n, M) \qquad \mu uv_n = 1000258.674924673$

$\mu v0_n := fv0\left(n, \mu uv_n - 1\right) \qquad \mu v0_n = 998985.675573394$

проверка:

$$Coll\left(\mu v0_n, 1, u_0, v_0, n\right) = \begin{pmatrix} 0.001000508 \\ 6.598249018 \times 10^{-16} \\ 785 \end{pmatrix} \qquad Coll\left(\mu uv_n, 1, u_0, v_0, n\right) = \begin{pmatrix} 0.00099987 \\ -0.00099987 \\ 785 \end{pmatrix}$$

$\mu v0_{next} := fv0(n+1, \mu uv_n + 1)$ $\quad \mu v0_{next} = 1001532.484845426$

$\mu uv_{next} := fuv(n+1, \mu v0_{next})$ $\quad \mu uv_{next} = 1002807.105335649$

проверка:

$$Coll(\mu v0_{next}, 1, u_0, v_0, n+1) = \begin{pmatrix} 0.000999235 \\ 1.035236441 \times 10^{-16} \\ 786 \end{pmatrix}$$

$$Coll(\mu uv_{next}, 1, u_0, v_0, n+1) = \begin{pmatrix} 0.000998599 \\ -0.000998599 \\ 786 \end{pmatrix}$$

Заметим, что величина $C := \dfrac{\mu uv_{next} - \mu uv_n}{n+1}$ при n->inf стремится к некоторой константе $C = 3.242277877$, а

$\dfrac{C}{2} \cdot n^2 = 998986.342241598$ и $\dfrac{C}{2} \cdot (n^2 + n) = 1000258.936308148$ почти в точности совпадают с $\mu v0_n$ и $\mu uv_n$ !!!

(Если кто сможет это просто доказать, сообщите мне об этом.)

Вот теперь можно легко найти $\mu v0_n$, $\mu uv_n$, для любого n, например для $n := 1000$: $\quad M_{guess} := \dfrac{C}{2} \cdot n^2$

$\mu uv_{1000} := fuv(n, M_{guess})$ $\quad \mu uv_{1000} = 1622759.815833789$

$\mu v0_{1000} := fv0(n, \mu uv_{1000})$ $\quad \mu v0_{1000} = 1621138.27161078$

проверка:

$$Coll(\mu uv_{1000}, 1, u_0, v_0, n+11) = \begin{pmatrix} 0.000785006 \\ -0.000785006 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$Coll(\mu v0_{1000}, 1, u_0, v_0, n+11) = \begin{pmatrix} 0.000785398 \\ 1.904669492 \times 10^{-16} \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Итак, остается только написать программу, которая рассчитывает $\mu v0_n$ и $\mu uv0_n$ для n от 1 до $Np := 150$

```
μv0μuv := | δ ← 1
          | μ ← 0
          | for i ∈ 1..Np
          |     | μv0_i ← fv0(i, μ + δ)
          |     | μ ← μv0_i
          |     | μuv_i ← fuv(i, μ + δ)
          |     | μ ← μuv_i
          | (μv0)
          | (μuv)
```

Пояснение алгоритма программы:

$fv0(1,0) = 1$ $\quad fv0(2,4) = 5.828427125$ $\quad fv0(3,11) = 13.92820323$

$fuv(1,2) = 3$ $\quad fuv(2,6) = 9.472135955$ $\quad fuv(3,15) = 19.195669358$

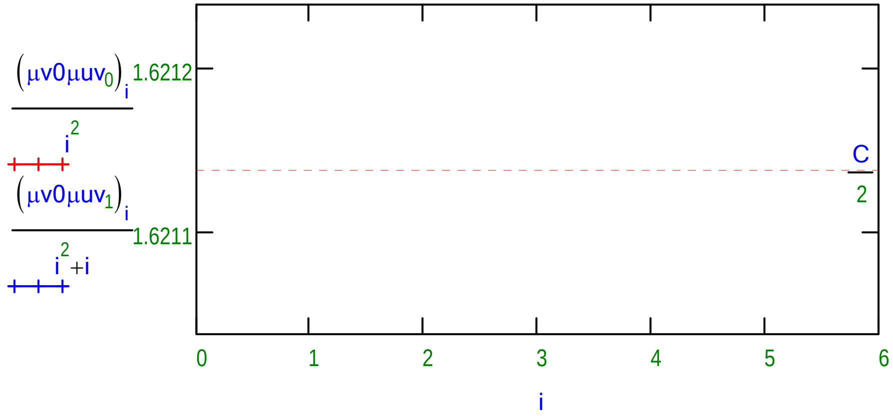
$\mu v0\mu uv_0 =$

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 5.82843 |
| 3 | 13.9282 |
| 4 | 25.27414 |
| 5 | 39.86346 |
| 6 | 57.69548 |
| 7 | 78.76998 |
| 8 | 103.08687 |

$\mu v0\mu uv_1 =$

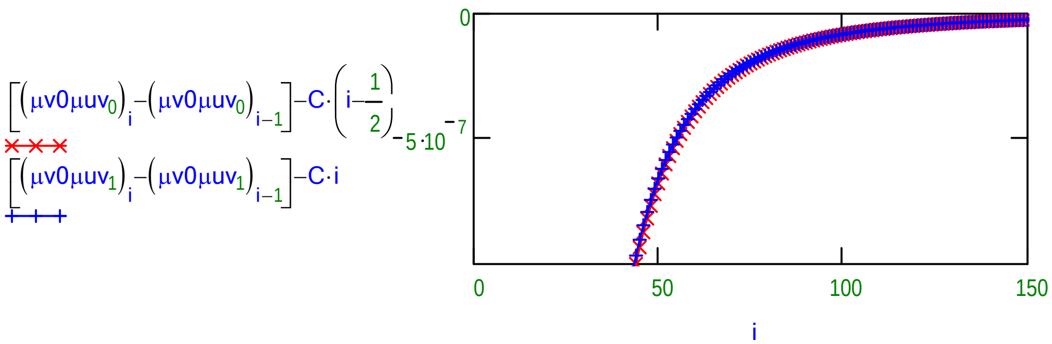
| | 0 |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 9.472135955 |
| 3 | 19.195669358089 |
| 4 | 32.163437477526 |
| 5 | 48.374150078708 |
| 6 | 67.827429069604 |
| 7 | 90.523130967774 |
| 8 | 116.461191577488 |

$i := 1 .. Np$




Любопытно что
$(\mu v0_i - \mu v0_{i-1})$ -> C*(i-1/2)
$(\mu uv0_i - \mu uv0_{i-1})$ -> C*i
при i->inf:

(Если кто сможет это просто доказать сообщите мне об этом.)




## Задание для заинтересовавшихся:

Найти зависимость времени между началом движения второго тела и последним столкновением от M/m. (Первое тело в начальный момент времени находилось на расстоянии l от стенки, а второе тело находилось у стенки. Размерами тел пренебречь.)

## Заключение:

Итак, задача в приведенной в самом начале формулировке, решена.
Однако усложнив условие, например, следующим образом:

- после каждого столкновения со стенкой второе тело приобретает дополнительно энергию E

или

- между телами m и M находится тело с массой M1

даже качественный результат решения становится заранее совершено непонятным.

В связи с этим приглашаю любителей физики математики и программирования заняться данными исследовательскими задачами. Думаю они под силу даже продвинутым школьникам, т.к. не требуют никаких особых теоретических знаний. (Если вам потребуется помощь пишите на e-mail, приведенный на goldzub.narod.ru )